

Relatividad General - Guía 1: Geometría y Principio de Equivalencia

1. Calcular el área de un círculo de radio r (distancia al centro de la circunferencia) en la geometría bidimensional de una esfera de radio a . Mostrar que el área tiende a πr^2 cuando $r \ll a$

2. Considere la siguiente transformación de coordenadas en el plano (x, y)

$$x = \mu\nu \quad y = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) \quad (1)$$

a) dibujar las líneas $\mu = \text{constante}$ y $\nu = \text{constante}$

b) escribir el elemento de longitud en términos de las nuevas coordenadas

c) calcular el cociente entre el perímetro y el radio de una circunferencia utilizando dichas coordenadas (para ello escriba previamente la ecuación de una circunferencia de radio r en términos de μ y ν).

3. Para hacer mapas planos de la superficie terrestre se hacen cambios de coordenadas de la forma $x = x(\theta, \phi)$ $y = y(\theta, \phi)$, donde θ y ϕ son la latitud y longitud de un punto sobre la superficie terrestre y (x, y) las coordenadas sobre el mapa. Suponga que $x = L\phi/2\pi$, donde L es el ancho del mapa.

a) Encontrar la transformación de coordenadas $y(\theta)$ tal que las áreas en el mapa sean proporcionales a las áreas reales.

b) Idem tal que el mapa preserve los ángulos (esta es la muy utilizada proyección de Mercator)

c) Calcular la distancia física entre dos puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) .

d) Mostrar que la proyección de Mercator no preserva las áreas.

4. Es posible detectar el campo gravitatorio de la Tierra dentro del Taxi Espacial? Suponga que un astronauta suelta, dentro de la nave, dos pelotitas de ping pong separadas por una distancia vertical s . La velocidad inicial de la que está más cerca de la Tierra es exactamente la requerida para que la órbita sea circular. Calcule la excentricidad de la órbita elíptica de la otra pelotita, y estime el cambio en la distancia entre ellas durante un período.

5. La edad de la Tierra es de aproximadamente 5000 millones de años. Estime la diferencia de edad entre rocas en el centro de la Tierra y rocas en la superficie, producidas por el corrimiento al rojo gravitacional. Suponga que en el momento de formación de la Tierra existieron cantidades iguales de cierto material radioactivo (de vida media 4000 millones de años) en el centro y en la superficie. Cuánto más material habrá hoy en el centro? (suponga que la densidad de la Tierra es constante).