Relatividad General - Guía 2: Repaso de Relatividad especial

1. Usando las transformaciones de Lorentz, encontrar la ley relativista de adición de velocidades: a)por cálculo directo y b)haciendo un boost sobre la cuadrivelocidad de una partícula.

2. Supongamos que el sistema de referencia O' se mueve con velocidad **v** respecto del sistema O y que el sistema de referencia O" se mueve con velocidad **v'** con respecto a O'.

a) Mostrar que la transformación de Lorentz entre O y O" está dada por

$$\Lambda^{\alpha''}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha''}{}_{\gamma'}(\mathbf{v}')\Lambda^{\gamma'}{}_{\beta}(\mathbf{v})$$

b) Suponga ahora que los ejes de coordenadas cartesianas de los sistemas O, O' y O" se orientan de manera que forman ternas directas y tanto $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ como $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ e $\mathbf{y}''$ son paralelos entre sí. En el caso particular en que $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{v}' = v'_y\hat{\mathbf{y}}$, muestre que el resultado de la composición es igual a un boost de velocidad $\mathbf{v_c} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v'_y/\gamma(v_x)\hat{\mathbf{y}}$ (composición relativista de velocidades) seguido de una rotación en el plano x-y (rotación de Wigner). Obtenga el ángulo de rotación.

3. Un superhéroe (Flash) lleva una jabalina de 20 m en posición horizontal. Flash corre hacia un garage y lo hace tan rápidamente que para un observador en reposo en el sistema fijo al garage la misma jabalina mide 10 m. El superhéroe entra al garage por la puerta trasera del mismo y se dirige hacia la delantera que se encuentra cerrada. Según el observador, el garage mide 10 m y, por lo tanto, concluye que si la puerta trasera se cerrase en el mismo instante en que uno de los extremos de la jabalina llega a la puerta delantera, la jabalina entera quedaría encerrada en el garage. Sin embargo, desde el punto de vista de Flash, la jabalina no podría quedar contenida en el garage porque éste mide solo 5 m. Explicar esta paradoja cuantitativamente mediante diagramas espacio-temporales.

4. Un modelo simple de un reloj consiste en un pulso de luz que se refleja continuamente entre dos espejos planos paralelos entre sí y separados por una distancia propia L. Las reflecciones sucesivas de la luz en uno de los espejos corresponden a los eventos que definen los intervalos sucesivos de tiempo propio $\Delta\tau$ a lo largo de la línea de universo del reloj. Ilustre el fenómemo de dilatación del tiempo, resolviendo el problema desde el punto de vista de un observador que se mueve en una dirección paralela a los espejos.

5. Los mellizos Gustavo y Guillermo se mueven en direcciones opuestas alrededor de un anillo circular de radio R, el cual está en reposo respecto de un sistema inercial. La velocidad de ambos medida en dicho sistema es v. Los relojes de ambos se sincronizan en el instante $t = t' = 0$, en que parten desde la misma posición sobre el anillo. Tanto Gustavo como Guillermo conocen el fenómeno de dilatación del tiempo. Gustavo predice que, debido al movimiento de Guillermo, la próxima vez que se encuentren el reloj de Guillermo estará atrasado respecto al suyo. Por el mismo razonamiento, Guillermo predice que el reloj de Gustavo estará atrasado. No es posible que ambas predicciones sean correctas. Cuál es el error de sus razonamientos? Qué medirá cada reloj cuando se encuentren? (esta es una de las tantas variantes de la paradoja de los gemelos, y está discutida en detalle en M. Cranor et al, Am.J. Phys. 68, 1016 (2000). Otra variante interesante se discute en S. Boughn, Am. J. Phys. 57, 791 (1989)).

6. a) Mostrar que la conservación de P^α prohibe la reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan y producen un fotón. Es posible que se produzcan dos fotones?

b) Un fotón de frecuencia ν choca con un electrón inicialmente en reposo (scattering Compton). Suponga que el fotón se desvía un ángulo θ respecto de la trayectoria original. Cuál es la frecuencia final del fotón?

7. a) Encontrar la acción correspondiente a una partícula relativista que se mueve en un campo electromagnético. Comparar con la acción clásica.

b) Resolver las ecuaciones de movimiento para campo eléctrico constante (y campo magnético nulo) y para campo magnético constante (y campo eléctrico nulo). Comparar con las trayectorias clásicas.

c) Mostrar que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas pueden deducirse a partir de la acción

$$S = \int d^4x[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu]$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Mostrar que las ecuaciones homgéneas son consecuencia de la definición de $F_{\mu\nu}$ en términos de A_μ.

d) Cómo transforman el campo eléctrico y el campo magnético ante una transformación de Lorentz? Aplique el resultado para calcular el campo electromagnético producido por una partícula cargada que se mueve con velocidad constante a partir de la ley de Coulomb. Interprete el resultado en el límite no relativista.

e) Qué cantidades invariantes pueden formarse contrayendo el tensor de intensidad de campo y su dual?

8. Considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x con velocidad

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2t^2}},$$

donde t es la coordenada temporal y g una constante.

a) Calcular las componentes de la cuadrivelocidad $\mathbf{u}$.

b) Expresar x y t como función del tiempo propio τ a lo largo de la trayectoria. Graficar la línea de universo de la partícula.

c) Cuales son las componentes de la cuadri-aceleración $\mathbf{a}$?

d) Verificar que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{a}$ son ortogonales (en el sentido de la métrica pseudo-euclídea $\eta_{\alpha\beta}$). Este último resultado es general?

e) Sobre una línea de universo de partícula, la cuadrivelocidad $\mathbf{u}$ siempre es tipo temporal. Cómo es la cuadriaceleración?

9. Considere una partícula con cuadrimomento $\mathbf{p}$ y un observador con cuadrivelocidad $\mathbf{u}$. Muestre que si la partícula atravieza el laboratorio del observador, el módulo p del momento tridimencional medido es

$$p = [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})]^{1/2}.$$