Relatividad General - Guía 3: Espacios curvos

1. a) Usando un cambio de coordenadas adecuado muestre que la métrica

$$ds^2 = -2dudv + dy^2 + dz^2$$

describe el espacio tiempo de Minkowski.
b) Calcule la cuadrivelocidad de una partícula en reposo en coordenadas usuales de Minkowski y transforme el resultado a las coordenadas (u, v, y, z).

2. Considere la métrica dada por $(A > 0)$

$$ds^2 = -(1 - Ar^2)^2 dt^2 + (1 - Ar^2)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Calcule: a) la distancia a lo largo de una línea radial que va de $r = 0$ a $r = R$; b) el area de la esfera definida por la coordenada radial r=R; c) el volumen de la esfera dada por $r < R$; d) el cuadrivolumen de un tubo en cuatro dimensiones encerrado por la esfera del punto b) y los planos definidos por $t = T_1$ y $t = T_2$.

3. Considere una métrica Lorentziana en cuatro dimensiones, y un sistema de coordenadas con una coordenada temporal t y tres coordenadas espaciales x^i. La distancia propia d_{AB} entre dos puntos cercanos A y B de coordenadas x^i y $x^i + dx^i$ puede definirse de la siguiente manera: d_{AB} es un medio del tiempo propio que tarda un haz de luz en viajar desde A hasta B y regresar. Obtenga la expresión para la distancia propia d_{AB} sin asumir que la métrica es diagonal.

4. Para testear la dilatación del tiempo y el corrimiento al rojo gravitacional, se colocan dos relojes atómicos muy precisos en aviones que vuelan alrededor de la Tierra en una órbita ecuatorial, uno de ellos hacia el este y el otro hacia el oeste. Al regresar, las lecturas de los relojes se comparan con la de un tercer reloj que se mantiene en la superficie terrestre. Calcular la diferencia de tiempos entre los tres relojes en función de la altura y velocidad promedio de los vuelos. Importante: debido a la rotación de la Tierra sobre su propio eje, el reloj que queda sobre la superficie también se encuentra en movimiento respecto a relojes inerciales fijos, por ejemplo, al centro de la Tierra. (Este experimento se realizó por primera vez en Octubre de 1971).

5. Suponga que la partícula del problema 8 de la guia de Relatividad Especial es un observador que recibe luz proveniente de una estrella que permanece estacionaria en $x = 0$. La frecuencia de la luz es ω_0, medida en el sistema en reposo con el emisor. Hallar la frecuencia que mediría el observador como función del tiempo propio τ.

6. a) Transforme el elemento de línea de la relatividad especial del sistema de coordenadas cartesianas a las coordenadas (t', x', y', z') definidas mediante

$$t = \left(\frac{c}{g} + \frac{x'}{c}\right) \sinh\left(\frac{gt'}{c}\right),$$

$$x = c\left(\frac{c}{g} + \frac{x'}{c}\right) \cosh\left(\frac{gt'}{c}\right) - \frac{c^2}{g},$$

$$y = y', \quad z = z',$$

donde g es una constante con dimensiones de aceleración.

b) Para $gt'/c << 1$, mostrar que ésta corresponde a una transformación a un sistema acelerado uniformenente dentro de la teoría de Newton.

c) Mostrar que un reloj en reposo en $x' = h$ adelanta respecto de uno en $x' = 0$ (también en reposo). Cómo se relaciona esto con el principio de equivalencia?

7. Considerar un espaciotiempo bidimensional y un sistema de coordenadas (v, x) tales que elemento de línea puede escribirse como

$$ds^2 = -xdv^2 + 2dvdx.$$

a) Hallar el cono de luz para un punto (v, x).

b) Hacer un diagrama espaciotemporal que muestre cómo cambian los conos de luz con x.

c) Mostrar que una partícula puede cruzar desde un x positivo a uno negativo, pero no de un x negativo a uno positivo.

8. Las métricas de Robertson–Walker definidas por

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right],$$

donde $k = 0, 1, -1$, son relevantes en cosmología.

Muestre que estas métricas pueden reescribirse como sigue:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Encuentre la función $f(\chi)$ para los tres casos $k = 0, 1, -1$ Qué geometría describe la parte tridimensional de la métrica?

9. Una métrica es *conformemente plana* si difiere de la de Minkowski sólo por un factor global, es decir, $ds^2 = \Omega^2(x^\alpha)ds^2_{Mink}$. La función $\Omega(x^\alpha)$ se llama el *factor conforme*.

(a) Mostrar que la métrica de Robertson–Walker "plana" $(k = 0)$ es conformemente plana.

(b) Serán conformemente planas las otras métricas de Robertson–Walker? Pruebe con la transformación de coordenadas

$$\rho = \frac{2\sin\chi}{\cos\chi + \cos\eta} \qquad \tau = \frac{2\sin\eta}{\cos\chi + \cos\eta} \qquad \eta = \int dt R^{-1}(t)$$

en el caso $k = 1$.

10. Considere la métrica de un espacio plano de dos dimensiones en coordenadas cartesianas

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

y escriba el elemento de línea dl^2 en coordenadas polares.

a)Transforme los versores cartesianos y las componentes cartesianas de un vector $\mathbf{v}$ a la base coordenada polar. La base coordenada polar es una base de versores? Si la respuesta es no, halle una base de versores.

b) Obtenga una expresión de $\partial_\mu v^\mu$ en ambas coordenadas. Discuta si $\partial_\mu v^\mu$ transforma o no como un escalar y formalice su conclusión con una demostración.

11. Para una base coordenada formada por el conjunto de vectores $\mathbf{e}_\alpha$ y la base dual correspondiente $\mathbf{e}^\alpha$, mostrar que se cumplen las siguentes relaciones:

a) $\mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta$ y $\mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta$;

b) $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta}$.

12. Pruebe que si $X_a Y^a$ es invariante para cualquier vector Y^a, entonces X_a es un vector. Generalice para contracciones arbitrarias de tensores.

13. Muestre que $\sqrt{|g|}d^4x$ (con $g = det(g_{\mu\nu})$) es un elemento de volumen invariante ante cambio general de coordenadas. Para ello pruebe que $\int f(x^\mu)\sqrt{|g|}d^4x = \int f(x'^\mu)\sqrt{|g'|}d^4x'$, para toda función f invariante.

Ayuda: Establezca la relanción existente entre g, g' y el Jacobiano de la transformación $x^\mu \to x'^\mu$.

14. Utilice distintas coordenadas curvilíneas en un espacio euclideano y verifique que la noción de volumen del problema anterior coincide con el calculado habitualmente multiplicando elementos de arco.

15. El símbolo de Levi-Civita de rango 4 se define como

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = [\lambda,\mu,\nu,\rho] = \begin{cases} +1, & \text{si } \lambda,\mu,\nu,\rho \text{ es una permutación par de } 0,1,2,3; \\ -1, & \text{si } \lambda,\mu,\nu,\rho \text{ es una permutación impar de } 0,1,2,3; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

a) Muestre que $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \sqrt{|g|}[\lambda, \mu, \nu, \rho]$ se comporta como un pseudo-tensor ante cambio general de coordenadas.

b) Escriba $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ en términos de $[\lambda, \mu, \nu, \rho]$.

Ayuda: Establezca la relación existente entre el determinante de una matríz $A^{\mu}{}_{\nu'}$ y $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} A^{\lambda}{}_{\lambda'} A^{\mu}{}_{\mu'} A^{\nu}{}_{\nu'} A^{\rho}{}_{\rho'}$.