Relatividad General - Guía 4: Derivada covariante y tensor de curvatura

1. A partir de la definición de derivada covariante en el sistema localmente inercial, deduzca la expresión para la derivada covariante de un tensor con un índice contravariante y otro covariante.

2. Usando que $\nabla_\mu V^\nu = V^\nu_{;\mu} = V^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho$ es un tensor para todo vector V^ν, encuentre la ley de transformación para los $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$. Confirme que $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ puede ser cero en un sistema de coordenadas y diferente de cero en otro.

3. Demuestre las siguientes propiedades de la derivada covariante:

a) Regla de Leibniz: $\nabla_\lambda (A^\mu B_\nu) = \nabla_\lambda A^\mu B_\nu + A^\mu \nabla_\lambda B_\nu$.

b) Contracciones: $\nabla_\rho T^{\mu\lambda}_{\ \ \lambda} = T^{\mu\lambda}_{\ \ \lambda,\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\nu\lambda}_{\ \ \lambda}$.

c) Conmutatividad con el tensor métrico: $\nabla_\rho (g^{\mu\sigma} T^\lambda_{\mu\sigma}) = g^{\mu\sigma} \nabla_\rho T^\lambda_{\mu\sigma}$.

d) Conexión simétrica: $\nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu = V_{\nu,\mu} - V_{\mu,\nu}$.

e) Divergencia: $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} V^\mu)_{,\mu}$. En particular, $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \phi_{,\nu})_{,\mu}$.

4. Considere un sistema de coordenadas en el cual la métrica de un espacio euclídeo de tres dimensiones toma la forma diagonal,

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2.$$

a) Demuestre que las componentes del rotor de un vector $\vec{V}$ en base coordenada pueden escribirse como

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} (V_{k,j} - V_{j,k}),$$

donde i,(j y k) $= 1, 2, 3$; ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita (totalmente antisimétrico y vale $+1$ si $[i, j, k]$ es una permutación par de $[1, 2, 3]$).

b) Escriba las componentes del rotor de $\vec{V}$ en una base ortonormal.

c) Aplique el resultado del punto b) para hallar las fórmulas usuales del rotor en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

y cilíndricas

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2.$$

5. a) Muestre que si un vector V^ν se transporta paralelamente a lo largo de una geodésica con vector tangente t^ν entonces la cantidad $g_{\mu\nu} t^\mu V^\nu$ es constante. Notar que esto no es válido para una curva arbitraria.

b) Muestre que si dos vectores U^μ y V^μ se transportan paralelamente a lo largo de una curva entonces la cantidad $g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu$ se mantiene constante a lo largo de la curva.
c) Concluya que, en una variedad pseudoriemanniana, si una geodésica es de tipo espacial (o nula o temporal) en un punto entonces lo será en todo punto.
d) Interprete geométricamente los resultados obtenidos en a) y b) en una variedad riemanniana.

6 Considere la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

que corresponde al exterior de una estrella de masa M esféricamente simétrica. A lo largo de la circunferencia definida por: $t = constante, r = r_0, \theta = \frac{\pi}{2}$, se realiza el transporte paralelo de los vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}$ definidos en un punto P de coordenadas $r = r_0, \phi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$, cuyas únicas componentes no nulas son: $V_r = (1 - 2MG/r_0)^{\frac{1}{2}}$ y $U_\phi = 1/r_0$.

a) Demuestre que durante el transporte paralelo las componentes t y θ de ambos vectores se mantienen nulas.

b) Calcule las componentes de los vectores $\mathbf{V}$,$\mathbf{U}$ luego del transporte paralelo. Cuánto vale el producto escalar entre éstos antes y después del transporte paralelo?

7. Usando las leyes de transformación de los símbolos de Christoffel pruebe que el tensor de Riemann es un tensor.

8. Suponga que $R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$, donde K es una función arbitraria. Verifique que el miembro derecho tiene las simetrías correctas para un tensor de curvatura. Encuentre el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Pruebe que K debe ser una constante si $n > 2$, donde n es la dimensión de la variedad.

9. a) Calcule el tensor de Riemann sobre una 2-esfera (note que en dos dimensiones el tensor de Riemann tiene una única componente independiente!)
b) Idem sobre una superficie cilíndrica. Interprete geométricamente.

10. Usando las propiedades algebraicas del tensor de curvatura obtenga el número de componentes independientes del tensor de curvatura en una variedad de n dimensiones.