**Relatividad General - Guía 5: Geodésicas**

**1.** Considere la métrica

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{ab}dx^a dx^b \qquad a, b = 2, .... n.$$

a) Pruebe que la curva $\quad x^2 = const, x^3 = const, ... x^n = const \quad$ generada por $\frac{\partial}{\partial x^1}$ es una geodésica con $x^1$ como parámetro afín.

b) Concluya que toda circunferencia de radio $R$ en una 2-esfera (también de radio $R$) es una geodésica.

c) Use el resultado anterior para calcular la distancia mínima entre dos puntos de igual latitud y distinta longitud sobre la superficie terrestre.

**2.** Calcular la distancia mínima entre:

a) dos puntos sobre una superficie cilindrica de radio R;

b) dos vertices opuestos de la superficie de un paralelepípedo de lados a,b,c.

Ayuda: se puede calcular usando argumentos geométricos elementales!

**3.** A partir de la ecuación de las geodésicas mostrar que la "norma" de la cuadrivelocidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ es constante a lo largo de cada geodésica.

**4.** Encuentre los símbolos de Christoffel, la ecuación de las geodésicas y las cantidades conservadas para el espacio tiempo de Robertson–Walker

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

**5.** *Geodésicas en métricas con simetría esférica:* Para una variedad cuya métrica está dada por

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

a) calcule los símbolos de Christoffel a partir del principio variacional para las geodésicas

b) aplique el resultado a la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

c) obtenga los vectores de Killing y las cantidades conservadas.

**6.** La métrica de Minkowski en un sistema de coordenadas $(t, x, y, z)$ que rota con velocidad angular $\Omega$ alrededor del eje z está dada por

$$ds^2 = -[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

a) Verificar este resultado usando coordenadas polares y la transformación $\phi \rightarrow \phi - \Omega t$.

b) Escribir la ecuación de las geodésicas en el sistema rotante.

c) Estudiar el límite no relativista e interpretar el resultado en el marco de la mecánica Newtoniana.

**7.** Construir las coordenadas normales de Riemann para el espaciotiempo de Minkowski alrededor del origen de un sistema inercial. Las coordenadas construidas coinciden con las del sistema inercial?