Estructura de la Materia 4
Práctica 3: Ecuación de Dirac.

Segundo Cuatrimestre 2010

1. A partir de la definición de las densidades y corrientes de probabilidad $\rho(x,t)$ y $\vec{J}(x,t)$ en términos de las soluciones formales de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon, demuestre la validez de la ecuación de continuidad $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ en ambos casos.

2. Dadas las matrices
$$\alpha^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},$$
muestre que definiendo $\gamma^0\equiv\beta$ y $\gamma^i\equiv\beta\alpha^i$ se verifica
$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\equiv\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}.$$
(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.)

3. Sea la ecuación de Dirac escrita en forma covariante,
$$(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)\psi(x)=0.$$
   a) Halle las 4 soluciones en reposo linealmente indepedientes:
   $$u^{(1)}(m,\vec{0}),\ u^{(2)}(m,\vec{0}),\ u^{(3)}(m,\vec{0}),\ u^{(4)}(m,\vec{0})$$
   junto a sus respectivas dependencias temporales. Piense qué quiere decir energía positiva o negativa.

   b) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad
   $$\frac{\partial\rho_{Dirac}}{\partial t}+\vec{\nabla}.\,\vec{J}_{Dirac}=0$$
   mostrando que $\rho_{Dirac}=\psi^\dagger\psi$ y $\vec{J}_{Dirac}=\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$.

   c) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,
   $$H\psi=i\partial_t\psi.$$

4. Momento angular total:

   a) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por
   $$\vec{S}\equiv\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

b) Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm\hbar/2$ en unidades anti-naturales).

c) Verifique este operador satisface el valor de J^2 esperado para una partícula de espín 1/2.

5. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

6. A partir de la sustitución $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \to \epsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ecuación de Dirac muestre que, en el límite no relativista y de campos débiles, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - g\frac{q}{2m}\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\,\vec{B} \right)\psi = \epsilon_{NR}\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón que, si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

7. Para hallar las soluciones de la ecuación de Dirac con momento $\vec{p} \neq 0$ se puede aplicar un boost sobre la soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$).

   a) Sabiendo que los generadores del grupo de Lorentz $J^{\mu\nu}$ cumplen con la siguiente relación de conmutación:

   $$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right)$$

   Compruebe que los operadores $S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ son generadores de una representación del grupo de Lorentz.

   b) Mostrar que si se definen las matrices de transformaciones de Lorentz finitas

   $$S_\Lambda \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}},$$

   donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación, entonces vale que

   $$S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$

donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ es la matriz que se obtiene de exponenciar los generadores de la representación vectorial $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ *con el mismo parámetro* $\omega_{\alpha\beta}$,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}}.$$

(Observe que α y β son índices que rotulan al generador y éste es una matríz de 4×4 cuyos índices μ y ν no se escriben para no sobrecargar.)

c) Obtenga la función de onda boosteada

$$\psi'(x) = S_{\Lambda}\psi(\Lambda^{-1}x)$$

tal como la vería un observador en el nuevo sistema de referencia, donde el fermión se halla en movimiento. Concluya que si $\psi(x)$ es solución de la ecuación de Dirac en un dado sistema de referencia, entonces $\psi'(x)$ es solución de la misma ecuación pero planteada en un segundo sistema de referencia al que se llega a través del boost determinado por Λ desde el primer sistema. Esta conclusión demuestra que la ecuación de Dirac es una ley de la física invariante Lorentz.

8. Considere una transformación de Lorentz $x^{\mu} \to x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ que transforma al espinor ψ según $\psi \to \psi' = S_{\Lambda}\psi$ donde $S_{\Lambda}^{-1}\gamma^{\mu}S_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$. Sabiendo que para una transformación infinitesimal para el operador S se obtiene $S = 1 - \frac{1}{8}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]\epsilon^{\alpha\beta}$ (donde $\epsilon^{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación) muestre que

   a) $S^{\dagger}\gamma^{0} = \gamma^{0}S^{-1}$

   b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$.

   c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.

   d) $j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ es un cuadrivector.

   e) $\bar{\psi}\gamma^{5}\psi$ es un pseudoescalar.

   f) $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

9. Muestre que $\gamma^{5} \equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^{5} es conocido como el operador de quiralidad.

10. Muestre que el operador de helicidad $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}.\,\hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

11. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma}.\,\hat{p})u(\vec{p}).$$

Por otro lado, verifique que para las antipartículas, quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma}.\,\hat{p})v(\vec{p}).$$

12. Partiendo de la definición de los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, demuestre las siguientes propiedades

$$\begin{array}{lrcl} \text{que son proyectores} & P_\pm^2 & = & P_\pm \\ \text{sobre espacios disjuntos} & P_+P_- & = & 0 \\ \text{complementarios} & P_+ + P_- & = & 1 \\ \text{y que corresponden a la quiralidad } \textit{Right} \text{ y } \textit{Left} & \gamma^5 P_\pm \psi & = & \pm\psi \end{array}$$

13. Además de la representación de Dirac para las matrices γ, existe la representación de Weyl (o quiral),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Muestre que estas matrices también cumplen con la condición $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

   b) Muestre que en en esta representación la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, donde $\psi_L = P_L\psi$ representa la parte de quiralidad *left* y $\psi_R = P_R\psi$ la parte de quiralidad *right* de la función de onda.

   c) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R