Computación cuántica - 1^{er} cuatrimestre 2006
Guía 1: Álgebra lineal y notación de Dirac

1. Un producto interno hermitiano satisface:
   - $(|w\rangle, \sum_i \lambda_i |v_i\rangle) = \sum_i \lambda_i (|w\rangle, |v_i\rangle)$.
   - $(|w\rangle, |v\rangle) = (|v\rangle, |w\rangle)^*$.
   - $(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$, $(|v\rangle, |v\rangle) = 0 \iff |v\rangle = 0$.

   Mostrar que debe entonces satisfacer: $(\sum_i \lambda_i |w_i\rangle, |v\rangle) = \sum_i \lambda_i^* (|w_i\rangle, |v\rangle)$.

2. Dado el operador $A = |0\rangle\langle 0| + (1/2)|0\rangle\langle 1| - (1/2)|1\rangle\langle 0|$, escribir su representación matricial en la base computacional.

3. Los operadores de Pauli son los siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular su traza.

   b) Hallar sus autovalores y autovectores.

   c) Mostrar que son hermíticos y unitarios (lo cual implica que al elevarlos al cuadrado se obtiene la identidad).

   d) Expresarlos en la notación de productos externos de elementos de la base $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

   e) Probar que las matrices de Pauli X, Y, Z anticonmutan, o sea, que $XY = -YX$, $XZ = -ZX$, $YZ = -ZY$.

   f) Verificar que $XY = iZ$, $YZ = iX$, $ZX = iY$ (notar que el orden de los operadores cambia cíclicamente).

   Nota: También se usan para los operadores de Pauli las notaciones alternativas: $I = \sigma_0$, $X = \sigma_X = \sigma_1$, $Y = \sigma_Y = \sigma_2$, $Z = \sigma_Z = \sigma_3$.

4. Mostrar que los autovalores de un operador hermítico ($H^\dagger = H$) son reales, los de un operador unitario ($U^\dagger = U^{-1}$) son de la forma $e^{i\phi}$ con $\phi \in \mathbb{R}$, y los de un proyector ($P^2 = P^\dagger = P$) son 0 ó 1.

5. Mostrar que los autovectores de un operador hermítico correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

6. Demostrar la propiedad cíclica de la traza: Tr(ABC) = Tr (BCA).

7. Usando que los cambios de base corresponden a transformaciones unitarias, mostrar que la traza de un operador es independiente de la base respecto de la cual se calcule.