Computación cuántica - 1$^{\text{er}}$ cuatrimestre 2006
Guía 2: Introducción a la mecánica cuántica

1. Mostrar que el estado $|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ es entrelazado (o sea, no puede escribirse como un estado producto $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$).

2. Mostrar que los cuatro estados de Bell: $|\beta_{jk}\rangle = (|0,k\rangle + (-1)^j|1,(1-k)\rangle)/\sqrt{2}$ (donde $j,k \in \{0,1\}$) forman una base ortonormal para el espacio de estados puros de dos qubits.

3. Dada una descomposición de la identidad en la forma: $I = \sum_j P_j$ donde los P_j son proyectores, mostrar que:

   a) $P_j P_k = 0 \quad \forall j \neq k$ (recordar el ejercicio 4 de la guía anterior).

   b) todo estado $|\psi\rangle$ puede descomponerse en la forma $|\psi\rangle = \sum_j \sqrt{p_j}|\psi_j\rangle$, donde $p_j = \langle\psi|P_j|\psi\rangle$, $|\psi_j\rangle = (P_j|\psi\rangle)/\sqrt{p_j}$, y $\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{jk}$.

   c) si la dimensión del espacio es N, puede haber como máximo N proyectores no nulos en la suma.

4. Mostrar que medir el operador de Pauli X es medir respecto de la base $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ donde $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)\sqrt{2}$. Indicar los posibles resultados, sus probabilidades y el valor de expectación $\langle X\rangle$ para una medición de este observable en el estado: a) $|0\rangle$, b) $|1\rangle$, c) $|+\rangle$.

5. Calcular el valor de expectación del operador $X \otimes Z$ en el estado de Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

6. Un sistema cuyo estado es $|\psi_j\rangle$ con probabilidad p_j puede describirse en la forma $\{|\psi_1\rangle : p = p_1; \ldots; |\psi_k\rangle : p = p_k\}$ o por medio de la matriz densidad $\rho = \sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$.

   a) Escribir la matriz densidad (en la base computacional) de los siguientes estados:

      1) $\{|0\rangle : p = 1/2; |1\rangle : p = 1/2\}$.

      2) $\{|+\rangle : p = 1\}$.

      3) $\{|+\rangle : p = 1/2;\ |-\rangle : p = 1/2\}$.

   b) Probar que si ρ es una matriz densidad entonces $Tr(\rho) = 1$, y ρ es no negativo (sus autovalores son mayores o iguales que cero).

7. Dado un sistema de dos qubits en el estado de Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, trazar sobre uno de los dos qubits para hallar la matriz densidad reducida del otro (por la simetría de este estado, da lo mismo trazar sobre cualquiera de los dos qubits).

8. Se tiene un sistema compuesto de dos subsistemas A y B; mostrar que:

   a) si el estado del sistema es $|a\rangle|b\rangle$, al trazar sobre el subsistema B se obtiene para el A una matriz densidad reducida que corresponde al estado puro $|a\rangle\langle a|$.

   b) si el estado está descripto por la matriz densidad ρ_{AB}, es equivalente tomar la traza parcial sobre el subsistema B y luego aplicar un operador unitario U en el subsistema A, o realizar las operaciones al revés, esto es, aplicar sobre el sistema completo el operador $U \otimes I$ y luego tomar la traza parcial sobre el subsistema B.

   c) tomar la traza parcial sobre B es equivalente a pensar que alguien realizó una medición sobre ese subsistema pero sin dar a conocer el resultado.