# Introducción a la Mecánica Cuántica (II)

## Clase nº 4 de Computación Cuántica

J. P. Paz, C. Cormick

Depto. de Física, FCEyN, UBA

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre 2006

# La cuarta clase se trató de:

- Postulados sobre la medición (otra versión)
- Medición de un spin en una dirección cualquiera
- La descripción de un sistema compuesto
- El sistema de dos qubits y los estados de Bell

# Postulados de la Mecánica Cuántica (II)

2 Un observable es un operador hermítico

$$\hat{A} = \sum_j a_j \hat{P}_j$$

donde los $\hat{P}_j$ son proyectores ortogonales ($\hat{P}_j \hat{P}_k = \hat{P}_j \delta_{jk}$), y $a_j \neq a_k \ \forall j \neq k$.

Los resultados posibles al medir $\hat{A}$ son sus autovalores $a_j$.

# Postulados de la Mecánica Cuántica (II)

**3** Si el estado inicial es $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado $a_j$ es

$$Prob(a_j) = \langle\psi|\hat{P}_j|\psi\rangle = Tr(\hat{P}_j\hat{\rho})$$

donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ es la "matriz densidad".

**4** Luego de obtener el resultado $a_j$, el estado es:

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_j|\psi\rangle}{\sqrt{Prob(a_j)}}$$

# Medición del spin

- El operador asociado al spin en la dirección del versor $\vec{n}$ es

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$$

- Los proyectores correspondientes a los resultados $+1$ y $-1$ en la medición de $\hat{S}_{\vec{n}}$ son (respectivamente):

$$|0_{\vec{n}}\rangle\langle 0_{\vec{n}}| = (1/2)(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad |1_{\vec{n}}\rangle\langle 1_{\vec{n}}| = (1/2)(I - \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$$

- Si el estado inicial es $|0_{\vec{z}}\rangle$, la probabilidad de obtener $+1$ al medir $\hat{S}_{\vec{n}}$ (con $\theta$ el ángulo entre $\vec{z}$ y $\vec{n}$) es:

$$Prob(+1, \vec{n}) = Tr(|0_{\vec{n}}\rangle\langle 0_{\vec{n}}||0_{\vec{z}}\rangle\langle 0_{\vec{z}}|) = cos^2(\theta/2)$$

# Sistemas compuestos

- El espacio de estados de un sistema compuesto por dos subsistemas $A$ y $B$ es $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Esto quiere decir que si $B_A = \{|\phi_1\rangle \dots |\phi_{d_A}\rangle\}$ y $B_B = \{|\psi_1\rangle \dots |\psi_{d_B}\rangle\}$ son bases de $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$, entonces los vectores $|\phi_j\rangle_A \otimes |\psi_k\rangle_B$ forman una base de $\mathcal{H}_{AB}$.

- Los estados de la forma $|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ se llaman "separables", o "producto".
- Los estados que no pueden escribirse en esa forma se llaman "no separables", o "entrelazados".

# Sistema de dos qubits

- Una base para el estado de un qubit es $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
- Si tenemos dos qubits, una base del espacio de estados es $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ (notación: $|jk\rangle \equiv |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B$). Ésta es una base de estados separables.

- Los "estados de Bell" forman una base ortonormal de estados entrelazados:

$$|\beta_{00}\rangle = (|00\rangle + |11))\rangle)/\sqrt{2}, \quad |\beta_{01}\rangle = (|01\rangle + |10))\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\beta_{10}\rangle = (|00\rangle - |11))\rangle)/\sqrt{2}, \quad |\beta_{11}\rangle = (|01\rangle - |10))\rangle)/\sqrt{2}$$

# Sistema de dos qubits: los estados de Bell

- Todos los estados de Bell pueden obtenerse a partir del $|\beta_{00}\rangle$ aplicando matrices de Pauli sobre uno de los qubits:

$$
\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle &= (|00\rangle + |11\rangle\rangle)/\sqrt{2} \\
|\beta_{01}\rangle &= (|01\rangle + |10\rangle\rangle)/\sqrt{2} = (X \otimes I)|\beta_{00}\rangle \\
|\beta_{10}\rangle &= (|00\rangle - |11\rangle\rangle)/\sqrt{2} = (Z \otimes I)|\beta_{00}\rangle \\
|\beta_{11}\rangle &= (|01\rangle - |10\rangle\rangle)/\sqrt{2} = (iY \otimes I)|\beta_{00}\rangle
\end{aligned}
$$

- En un estado de Bell, si mido el spin de uno de los qubits en cualquier dirección $\vec{n}$ los resultados $+1$ y $-1$ tienen igual probabilidad.
- Sin embargo, si mido los dos spines los resultados están correlacionados.