Evolución temporal

Clase nº 7 de Computación Cuántica

J. P. Paz, C. Cormick

Depto. de Física, FCEyN, UBA

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre 2006

La séptima clase se trató de:

- Estados GHZ y teorías de variables ocultas locales
- Los estados de una computadora cuántica
- Evolución temporal: la ecuación de Schrödinger
- La evolución de un spin en un campo magnético

Los estados GHZ y las variables ocultas

- El estado GHZ de tres spines es:

$$|\psi_{GHZ}\rangle = (|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$$

- En este estado, los tres spines están entrelazados.
- $|\psi_{GHZ}\rangle$ es autoestado de los operadores:
  $\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}; \;\; \hat{Y} \otimes \hat{X} \otimes \hat{Y}; \;\; \hat{Y} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{X} \longrightarrow$ autovalor $+1$
  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X} \longrightarrow$ autovalor -1.

- Si preparamos $|\psi_{GHZ}\rangle$ y enviamos cada spin a un laboratorio distinto, donde se mide al azar en la dirección $\vec{x}$ o $\vec{y}$, la cuántica predice resultados incompatibles con cualquier teoría local de variables ocultas.

Los estados de una computadora cuántica

- El estado de una computadora cuántica se almacena en un conjunto de n qubits (spines).
- Llamamos "base computacional" a la base $B = \{|00\ldots00\rangle, |00\ldots01\rangle, \ldots |11\ldots11\rangle\}$.
- Notación: $|x\rangle \equiv |x_1 \ldots x_n\rangle$, donde $x = \sum_j x_j\, 2^{n-j}$, $x \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $x_j \in \{0, 1\}$.
- Los estados del sistema son las combinaciones lineales de estados computacionales: $|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle$
- La probabilidad de medir en la base computacional (dirección $\vec{z}$) y obtener el resultado x es: $Prob(x) = |\alpha_x|^2$ $\Rightarrow$ normalización: $\sum_x |\alpha_x|^2 = 1$.

Evolución temporal

- El estado evoluciona según la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

donde $\hat{H}$ es un operador hermítico llamado "Hamiltoniano", que representa la energía del sistema (por ahora, asumimos que $\hat{H}$ es constante en el tiempo).

- Esta ecuación es fácil en la base en que $\hat{H}$ es diagonal: si $|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j(t)\,|\phi_j\rangle$, con $\hat{H}\,|\phi_j\rangle = E_j\,|\phi_j\rangle$, resulta: $c_j(t) = e^{-iE_j t/\hbar}\,c_j(0)$.

Evolución temporal

- Equivalentemente, la evolución del estado está dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$$

donde $\hat{U}(t)$ es el operador unitario: $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$.

- Ejemplo: para un spin en un campo magnético que apunta en la dirección $\vec{n}$, es $\hat{H} = (\hbar\Omega/2)\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, y por lo tanto:

$$\hat{U}(t) = e^{-i(\Omega t/2)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = cos(\Omega t/2)\ \hat{I} - i\ sen(\Omega t/2)\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

- Esto produce una rotación del spin en un ángulo que depende del tiempo.