Circuitos cuánticos

Clase nº 8 de Computación Cuántica

J. P. Paz, C. Cormick

Depto. de Física, FCEyN, UBA

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre 2006

La octava clase se trató de:

- Unitariedad de la evolución temporal
- Circuitos cuánticos y compuertas elementales
- El algoritmo de Deutsch

Unitariedad de la evolución temporal

- El estado evoluciona en la forma: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$ con $\hat{U}(t)$ un operador unitario que, si $\hat{H}$ es constante, es: $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$
- La evolución temporal unitaria conserva el producto interno entre estados.
- Esto implica, por ejemplo, que no hay ningún operador unitario que permita "clonar" estados cuánticos, o sea que mapee:

$$|\psi\rangle|0\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle \quad \forall|\psi\rangle$$

ya que esta operación no preserva el producto interno.

Algunas operaciones unitarias

- Para un spin en un campo magnético que apunta en la dirección $\vec{n}$, es $\hat{H} = (\hbar\Omega/2)\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, y como $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \hat{I}$:

$$\hat{U}(t) = e^{-i(\Omega t/2)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = cos(\Omega t/2)\ \hat{I} - i\ sen(\Omega t/2)\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

- Esto produce una rotación del spin: $U(t) = R_{\vec{n}}(\Omega t)$.

- Si dos spines interactúan con $\hat{H} = \hbar\epsilon\ Z\otimes Z$, como $(Z\otimes Z)^2 = \hat{I}\otimes\hat{I}$, resulta:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\epsilon t Z\otimes Z} = cos(\epsilon t)\ \hat{I}\otimes\hat{I} - i\ sen(\epsilon t)\ Z\otimes Z$$

Algunos resultados importantes

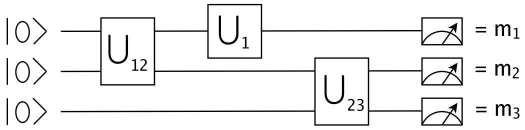
- Cualquier evolución unitaria de un conjunto de n spines se puede obtener componiendo operaciones de los dos tipos anteriores.

- Cualquier evolución unitaria de un spin se puede descomponer en la forma:

$$\hat{U} = e^{i\alpha}\ R_{\vec{z}}(\beta)\ R_{\vec{y}}(\gamma)\ R_{\vec{z}}(\delta)$$

Circuitos cuánticos

- La evolución de una computadora cuántica la representamos en la forma:



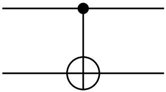
- Etapas: preparación del estado inicial, aplicación de compuertas (operadores unitarios) sobre uno o dos qubits, y medición final.

Algunas compuertas útiles

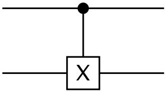
- Compuertas útiles de un qubit:
  - Las matrices de Pauli: X, Y, Z
  - La compuerta de Hadamard: $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Compuerta importante de dos qubits:
  - $CNOT = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes X$

  Esta compuerta niega el segundo qubit cuando el primero es igual a 1, y se representa:

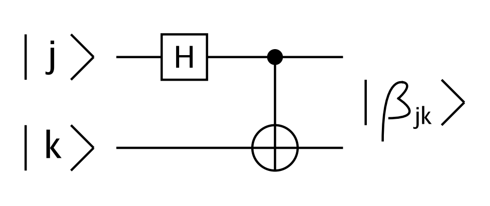


o



Creación de estados de Bell

- El siguiente circuito transforma los estados de la base computacional en estados de Bell:



El algoritmo de Deutsch

- Éste es el primer problema que muestra una superioridad de las computadoras cuánticas sobre las clásicas.
- Juego: Se tiene $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ y se quiere descubrir si f es constante o balanceada.
- Clásicamente es necesario evaluar dos veces la función.
- Cuánticamente basta con hacerlo una sola vez, usando el operador U_f que mapea: $U_f|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$
- Se elige el estado inicial $(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}})(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}})$; el estado final es $(\frac{|0\rangle+(-1)^{f(0)+f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}})(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}})$ (a menos de una fase global) $\Rightarrow$ medir el primer qubit en la base X da la respuesta.