Problemas
Teoría de Perturbaciones II. Casos degenerados [§]

1. Dada la matriz

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

construida usando una base ortonormal $\{\phi_i\}$

   (a) Comprobar que las energías exactas son $E_1 = 20.806$, $E_2 = 18.805$ y $E_3 = 30.389$

   (b) Comparar estos resultados con los obtenidos usando teoría de perturbaciones, en los órdenes 0, 1 y 2.

2. Calcular las energías de los primeros cuatro estados de un pozo bidimensional infinito de ancho a, perturbado por un potencial $H_1 = \lambda \hat{x}\hat{y}$
Solución: los estados tienen energías

   (a) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}2$

   (b) $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}5 + \frac{\lambda a^2}{4}(1 - \frac{1024}{82\pi^4})$

   (c) $E_3 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}5 + \frac{\lambda a^2}{4}$

   (d) $E_4 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}5 + \frac{\lambda a^2}{4}(1 + \frac{1024}{82\pi^4})$

3. Un electrón se encuentra en un pozo cúbico de ancho a, y tiene una energía $E = \frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{ma^2}$.

   (a) Determinar la corrección a 1^{er} orden de la energía de ese estado, al aplicarse como perturbación un campo eléctrico ϵ en dirección $\hat{z}$

   (b) Repetir el problema, ahora para la perturbación $H_1 = b\epsilon\hat{x}\hat{y}$.
   Solución: los estados tienen energías

      i. $E_1 = b\epsilon a^2 \left[\left(-\frac{16}{9\pi^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$

      ii. $E_2 = \frac{b\epsilon a^2}{4}$

      iii. $E_3 = b\epsilon a^2 \left[\left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$

4. Calcular las energías de los primeros cuatro estados de un pozo cúbico infinito de ancho a, perturbado por un potencial $H_1 = V_0$ para $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ y $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$

5. Calcular las energías de los primeros cuatro estados de un pozo cúbico infinito de ancho a, perturbado por un potencial

$$H_1 = a^3 V_0 \delta(x - \frac{a}{4})\delta(y - \frac{a}{2})\delta(z - \frac{3}{4}a)$$

6. Un sistema de pesas unidas (dumbbell) con momento de inercia I que rota con momento angular l, tiene autoestados

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$$

Si las pesas estan cargadas (cargas opuestas), el sistema se convierte en un dipolo d que rota.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/perturbaciones2

(a) Calcular los cambios de energía en 1^{er} orden cuando se le aplica un campo eléctrico constante

(b) Calcular lo mismo, aplicandole un campo magnético constante

7. Calcular el *efecto Stark* (influencia de campo eléctrico) en los niveles $n = 2$ del átomo de hidrógeno. Calcular las nuevas funciones de onda.

8. A un oscilador armónico bi-dimensional

$$\hat{H}_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

se le aplica una perturbación

$$\hat{H}_1 = K'xy = \delta m\omega^2 xy$$

(a) Calcular las energías y las funciones de los primeros 3 estados en primer orden de perturbación
Solución: los estados tienen energías

i. $E_1 = \hbar\omega$
ii. $E_2 = 2\hbar\omega - \frac{\lambda\hbar\omega}{2}$
iii. $E_3 = 2\hbar\omega + \frac{\lambda\hbar\omega}{2}$

(b) Calcular las energías en forma exacta
Ayuda: utilizar las variables desacopladas $u \equiv \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ y $v \equiv \frac{x-y}{\sqrt{2}}$