Problemas
Armónicos Esféricos [§]

1. **Ecuaciones diferenciales del momento angular**

   (a) Partiendo del gradiente en coordenadas esféricas:

   $$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

   y usando $\mathbf{r} = r\hat{r}$, hallar $\hat{L} = -i\hbar(\mathbf{r}\times\nabla)$ en estas coordenadas.
   (Recordar que $(\hat{r}\times\hat{\theta}) = \hat{\phi}$ y que $(\hat{r}\times\hat{\phi}) = -\hat{\theta}$)
   Respuesta:

   $$\hat{L} = -i\hbar\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

   (b) Expresar $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ en coordenadas Cartesianas:

   $$\begin{aligned}\hat{\theta} &= (\cos\theta\cos\phi)\hat{\imath} + (\cos\theta\sin\phi)\hat{\jmath} - (\sin\theta)\hat{k}\\ \hat{\phi} &= -(\sin\phi)\hat{\imath} + (\cos\phi)\hat{\jmath},\end{aligned}$$

   y reemplazarlo en la expresión de $\hat{L}$ anterior. Obtener así $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$.
   Respuesta:

   $$\begin{aligned}\hat{L}_x &= i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ \hat{L}_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ \hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned}$$

   (c) Calcular $\hat{L}^2$, $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$
   Respuesta:

   $$\begin{aligned}\hat{L}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\\ \hat{L}_\pm &= \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

2. **Armónicos Esféricos**

   (a) Partiendo de $Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$, encontrar $Y_2^2(\theta,\phi)$ y $Y_2^0(\theta,\phi)$

   (b) Un rotor rígido se encuentra en el estado

   $$\varphi(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\phi\sin\theta$$

   i. ¿Cuánto es $\langle\hat{L}_x\rangle$ en este estado?
   ii. ¿Cuánto es $\langle\hat{L}^2\rangle$ en este estado?

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/sphericalh

(c) Escribir la función de onda

$$\frac{1}{24}(Y_2^2 + 3Y_2^1 + 2Y_2^0 + 3Y_2^{-1} + Y_2^{-2})$$

(d) Establecer las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} x &= -r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 - Y_1^{-1}) \\ y &= ir\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 + Y_1^{-1}) \\ z &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0 \end{aligned}$$

3. **Algunas propiedades de los Armónicos Esféricos**

(a) Los armónicos esféricos conforman una base del espacio de Hilbert de las funciones cuadrado–integrables $\varphi(\theta, \phi)$ definidas en la esfera unidad. Expandir el estado

$$\varphi(\theta, \phi) = A \sin^2\theta \cos 2\phi$$

en esta base. ¿Qué valores se pueden obtener de una medición de $\hat{L}^2$? ¿Con qué probabilidad? ¿Y de $\hat{L}_z$?

(b) El operador paridad $\hat{P}$ se define como

$$\hat{P}f(r, \theta, \phi) = f(r, \pi - \theta, \pi + \theta)$$

De la definición de los Y_l^m resulta que

$$\hat{P}Y_l^m = (-1)^l Y_l^m.$$

Mostrar que esto es cierto para Y_0^0, Y_2^1, Y_2^2, Y_1^0, Y_1^{-1} y Y_3^0.

(c) Mostrar para los mismos casos que se cumple

$$[Y_l^m]^* = (-1)^m Y_l^{-m}.$$

(d) Demostrar que

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \phi)Y_l^{m*}(\theta', \phi') = \frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')$$