Laboratorio 4
Dpto. de Física - FCEyN - UBA

Conductividad térmica de líquidos

Objetivo: Determinación indirecta de la conductividad térmica de un líquido a partir del calentamiento —por efecto Joule— de una resistencia sumergida en el mismo.

Introducción: El calor es una forma de energía que puede estudiarse a través de la agitación térmica de las moléculas que constituyen un material. Cuando se entrega calor a un cuerpo, éste aumenta su temperatura, es decir, aumenta la movilidad de sus moléculas. Entonces, el sistema no se halla en equilibrio térmico: la temperatura en cada punto del cuerpo es diferente y varía con el tiempo [1].
Existen tres formas de transmisión del calor: *conducción*, *convección* y *radiación*. En la *conducción,* el calor se cede solamente a causa del movimiento molecular y los choques entre moléculas rápidas y lentas, sin desplazamiento global de la materia. En cambio, la *convección* se debe al movimiento global de la materia y sólo tiene importancia en líquidos y gases. Por último, la *radiación* es una interacción electromagnética entre cuerpos y no precisa de la existencia de un medio material para transmitir el calor de uno a otro.
La conducción de calor en un medio puede ser más o menos favorable conforme al material que se analice. Esta característica del medio se denomina *conductividad térmica* y, tal como se detalla en el apéndice, su determinación experimental requiere del diseño de dispositivos cuyas condiciones de simetría simplifiquen el análisis del flujo de calor en el tiempo [2].

Descripción de la experiencia: El método propuesto consiste en sumergir una fuente de calor en el líquido cuya conductividad térmica se desea medir. El calor de la fuente será disipado principalmetne a través de la conducción térmica en el medio que lo rodea, siendo despreciable la radiación y evitando la convección Si la conductividad K del líquido es suficientemente baja (haga una estimación de lo que significa baja) la fuente de calor aumentará sensiblemente su temperatura, y dicho aumento constituirá una medida indirecta del proceso de transferencia del calor, esto es, del valor de K
La resolución de la ecuación de difusión del calor depende de las condiciones de contorno del problema, por lo tanto considerar un dispositivo experimental con un alto grado de simetría contribuirá a una solución más sencilla del problema (la solución se detalla en el Apéndice A). Para ello como fuente de calor se dipondrá un delgado hilo de platino (Pt) de 0.05 mm de diámetro en el centro de un tubo que contiene el líquido cuya conductividad se desea medir: tetracloruro de carbono. Al circular una corriente continua por el hilo, como consecuencia del efecto Joule éste se calentará y variará su resistencia. Entonces, si el hilo constituye uno de los brazos de un puente de Wheastone, a medida que se caliente, desbalanceará el puente.

En una plaqueta se diponen: el puente de Wheastone (detallado en el Apéndice B) que consta de dos resistencias fijas, una variable (potenciómetro que podrá ajustar con un destornillador tipo perillero) y dos bornes para conectar el cuarto brazo del puente, esto es, el hilo sumergido en el líquido de conductividad incógnita. Asimismo en la plaqueta se encuentran dos resistencias: R_o *y* $R_1 » 10R_o$ en paralelo y serie con el puente, respectivamente, una llave que permite que la corriente circule sólo por el puente o mayoritariamente por R_o y los bornes para conectar la fuente de corriente que alimentará el circuito y el microvoltímetro digital con el que se medirá el desbalance del puente.

En síntesis, los elementos que necesitará, además del recipiente que contiene el hilo de platino y el Cl_4C, son:

- una fuente de corriente de 100 mA o variable que deberá utilizar entre 50 y 120 mA para preservar la vida útil del delgado hilo de Pt.
- la base que contiene las borneras de conexión, el puente de Wheastone y la llave para drenar corriente al puente.
- un microvoltímetro digital con memoria que permite almacenar 100 datos y el cable que le permitirá conectar este instrumento a una plaqueta IEEE-488 ubicada en una de las PC del laboratorio. De esta manera podrá transferir los datos adquiridos por el microvoltímetro a su PC, generando así un archivo en ASCII. Para ello utilice el programa CONDUCT.BAT (la extensión no es necesaria). Este programa lo transferirá al directorio QBASIC donde ejecutará el programa CONDUCT.EXE que es la versión ejecutable de CONDUCT.BAS versión en ASCII del programa en QBASIC, cuya lectura le permitirá conocer más en detalle las características del mismo. Sucintamente, este programa habilita al microvoltímetro para medir tensiones continuas en escala automática y guardar los datos que adquiera con la máxima velocidad posible (3 datos por segundo). Una vez acumulados 100 datos en la memoria del voltímetro, el programa transfiere los datos a la PC y permite grabar los mismos en el archivo que se le indique por teclado. Consulte el manual del instrumento y las sentencias del protocolo IEEE-488 si desea escribir su propio programa para esta u otra experiencia en la que emplee este microvoltímetro.

Precaución: El CCl_4 es **tóxico**. Para conocer las precauciones que merece su manipulación, consulte la cita bibliográfica [3]; allí también encontrará otros valores útiles para esta experiencia.

Los Apéndices A y B muestran cómo la difusión del calor en el líquido durante el estado transitorio se traduce en una dependencia lineal entre el desbalance del puente y el logarítmo del tiempo transcurrido desde que comenzó a calentarse el hilo. ¿Cumplen los datos medidos esta relación? Si es así determine a partir de ellos la conductividad térmica del líquido empleado. Si no lo es, establezca cuál de las hipótesis utilizadas en el desarrollo de los apéndices no se cumple.

Cuestionario:

1. ¿Cuál es la utilidad de la llave que controla el drenaje de corriente al puente?
   El calor de la fuente será disipado principalmente a través de la conducción térmica en el medio que lo rodea, ¿por qué no se tiene en cuenta a la radiación y a la convección? Como hacer para que los efectos de la convección se minimicen?
2. Cuán baja debe ser la conductividad del líquido para poder realizar la medición? (Si el líquido es buen conductor térmico, es decir, si $k \to \infty$ se calienta el hilo?)
3. ¿Por qué se utiliza un hilo de platino y por qué debe ser fino?, ¿qué otro metal podría usar en lugar de Pt?
4. ¿Podría realizar la práctica alimentando al puente con una fuente de corriente alterna?
5. ¿Por qué se utiliza un puente de Wheastone para medir la variación de la resistencia del hilo de Pt?

6. ¿Cómo se puede calcular la longitud del hilo? ¿ Es éste un método más preciso que la medición directa?
7. ¿Cuánto vale α?
8. ¿Cuánto vale ΔT y ΔR en cada medición?
9. Que pasa con las resistencias del puente cuando circula la corriente?
10. En la solución, (ver ecuación A-14 del Apéndice) aparece un parámetro P independiente del tiempo, que es la potencia disipada en el hilo por unidad de longitud. Es esta solución adecuada?

APÉNDICE A: Conducción del calor en un medio.

Consideremos una barra como la que se muestra en la figura A-1.

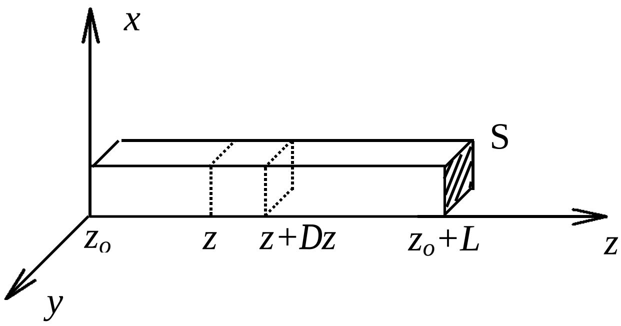

Fig.A-1: Barra que se pone en contacto con una fuente de calor ubicada en z_o

Si la simetría del problema nos permite suponer que T es sólo función de z, esto es, que la longitud de la barra es mucho mayor que sus dimensiones transversales, entonces

$$\frac{\P T}{\P x} = \frac{\P T}{\P y} = 0 \qquad \text{(A-1)}$$

El extremo ubicado en $z = z_o$ se pone en contacto con una fuente térmica a una temperatura T_o. Se aisla la superficie lateral de manera tal que el calor que penetra por la fuente atraviese la barra hasta llegar a $z = z_o+L$. Midiendo el flujo de calor $\dot{Q}$ (es decir la cantidad de calor que atraviesa la sección S por unidad de tiempo) para distintos valores de z, se observa que [4]:

- $\dot{Q}$ es proporcional a la diferencia T_o - $T(z)$
- $\dot{Q}$ es inversamente proporcional a la distancia medida desde la fuente
- $\dot{Q}$ es proporcional a la sección de la barra
- $\dot{Q}$ depende del material que constituye la barra

Los resultados anteriores pueden expresarse como

$$\Delta Q \propto S \frac{T_o - T(z)}{z - z_o}$$

que, al considerar un pequeño incremento *dz* se transforma en :

$$\Delta\dot{Q} = -k\frac{\P T}{\P z}S \qquad \text{(A-2)}$$

donde la constante de proporcionalidad K es la *conductividad térmica*. De acuerdo a (A-2) el flujo de calor en cada punto de la barra es proporcional al gradiente de temperatura pero tiene sentido contrario (el calor fluye del cuerpo más caliente al más frío). En el sistema internacional *K* se mide en watt/m.grado.
Haciendo el balance del flujo de calor en un tiempo *Dt* entre dos puntos de la barra se tiene

$$\begin{aligned} \Delta Q(z) - \Delta Q(z-\Delta z) &= k\; S\; \Delta t \left(\left.\frac{\P T}{\P z}\right|_{z} - \left.\frac{\P T}{\P z}\right|_{z+\Delta z} \right) \\ &= k\; S\; \Delta t \left.\frac{\P^{2} T}{\P z^{2}}\right|_{z} \Delta z \end{aligned} \qquad \text{A-3)}$$

La diferencia de temperatura *DT* entre *z* y *z+Dz* determina la variación de temperatura del volumen comprendido, esto es,

$$[\Delta\dot{Q}(z) - \Delta\dot{Q}(z+\Delta z)]\Delta t = C_{esp}\; \rho\; \Delta T\, S\, \Delta z \qquad \text{(A-4)}$$

donde $\boldsymbol{C_{esp}}$ es el calor específico y r la densidad de la barra. Comparando las ecuaciones (A-3) y (A-4) para $Dt \to 0$ resulta

$$\frac{k}{C_{esp}\;\; r}\,\frac{\P^{2} T}{\P z^{2}} = \frac{\P T}{\P t} \qquad \text{(A-5)}$$

El cociente $k/(C_{esp}\ r)$ se define como la difusividad del medio, k. Cuanto menor sea k tanto mayor será el tiempo requerido para lograr una temperatura homogénea en el cuerpo, en consecuencia su inversa se asocia con la “inercia térmica” del medio.

Generalizando la ecuación (A-5) para el caso tridimensional se obtiene la ecuación de difusión del calor:

$$\nabla^{2} T = \frac{1}{k}\frac{\P T}{\P t} \qquad \text{(A-6)}$$

cuya solución es [5], para un medio infinito,

$$T(x,y,z,t) = A(t)\;\; exp\{-[(x-x')^{2} + (y-y')^{2} + (z-z')^{2}] / 4\; k\; t\} \qquad \text{(A-7)}$$

donde *(x’, y’, z’)* es la coordenada de una “fuente” **puntual que libera o absorbe calor en el instante *t = 0*.**
Reemplazando (A-7) en (A-4) puede despejarse el valor de *A(t)*, teniendo en cuenta que el medio es infinito, y usando la definición de calor específico,

$$\Delta\dot{Q} = r\, C_{esp} \int_{espacio} \Delta T\, dV$$

$$= r\, C_{esp}\ A(t)\ \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4k\, t}\right] dx\right\}^3$$

$$= r\, C_{esp}\ A(t)\,(4p\, k\, t)^{3/2}$$

De esta manera

$$A\ (t) = \frac{\Delta\ \dot{Q}}{r\, C_{esp}\,(4\ p\ \ k\ \ t)^{\frac{3}{2}}}$$

y la temperatura puede expresarse como

$$T(x,y,z,t)\ =\ \frac{\Delta\dot{Q}}{r\ C_{esp}\ (4p k\, t)^{\frac{3}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}{4k\, t}\right\} \qquad \text{(A-8)}$$

Luego, para determinar la conductividad térmica de un líquido, se debe medir la dependencia espacial y temporal de la temperatura, a fin de calcular *k* (difusividad) usando la ec.(A-8) y de allí *k* (conductividad). Para que la dependencia espacial sea sencilla de medir, hay que construir dispositivos experimentales cuyas condiciones de simetría disminuyan el número de variables a considerar. Si la fuente térmica es un hilo infinito que entregue una cantidad de calor $D\dot{q}$ por unidad de longitud y de tiempo al líquido que lo rodea, y se lo ubica a lo largo del eje *z*, entonces $\bar{r}' = z'\hat{z}$. Como $-¥ < z' < ¥$, tenemos que $¶T/¶z = 0$ y $¶T/¶j = 0$. Es decir, la temperatura sólo depende de la coordenada radial y del tiempo. Como **la ecuación de difusión del calor es lineal**, la temperatura del líquido que rodea al hilo puede calcularse como la **suma de las contribuciones de infinitas fuentes puntuales instantáneas** ubicadas en el eje *z*, de modo que (A-8) puede reescribirse como

$$T(r,t) = \frac{\Delta\ \dot{q}}{r\, C_{esp}(4\ \ p\ \ \ k\ \ \ t)^{\frac{3}{2}}} \int \exp\left[-\frac{x^2+y^2+(z-z')^2}{4\ \ k\ \ \ t}\right] dz'$$

$$= \frac{\Delta\ \ \dot{q}}{r\, C_{esp}(4\ \ p\ \ \ k\ \ \ t)^{\frac{3}{2}}}(4\ \ p\ \ \ k\ \ \ t)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4\ \ k\ \ \ t}\right] \qquad \text{(A-9)}$$

$$T(r,t) = \frac{\Delta\ \ \dot{q}}{4\ \ p\ \ \ k\ \ \ t} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\ \ k\ \ \ t}\right\}$$

siendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ la coordenada radial en cilíndricas. Ahora bien, si en vez de ser una fuente instantánea el hilo emite una cantidad de calor desde $t = 0$ hasta t, entonces la temperatura resulta

$$T(r,t)=\frac{\Delta\ \dot{q}}{4\ \ p\ \ k}\int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4\ \ k\ \ (t-t')}\right]}{(t-t')}dt'$$

que, en términos de la exponencial integral

$$\mathbf{E}_{\mathrm{i}}(x)=-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$$

se reduce a

$$T(r,t)=\frac{\Delta\ \dot{q}}{4\ \ p\ \ k}\mathbf{E}_{\mathbf{i}}\left[\frac{-r^2}{4\ \ k\ \ t}\right] \qquad \text{(A-10)}$$

Como el desarrollo en serie de $E_i(x)$ está dado por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i}}(-x)=g+\ln x-x+\ldots \qquad \text{(A-11)}$$

donde g = *0.577* = *ln c'*, siendo *c'* = 1.781 la constante de Euler, para $r^2 \ll 4kt$, esto es, cuando la temperatura se evalúa cerca del hilo o para tiempos suficientemente largos resulta

$$T(a,t)\approx\frac{\Delta\dot{q}}{4\ \ p\ \ k}\ln\left(\frac{4\ \ k\ \ t}{c'\ \ r^2}\right) \qquad \text{(A-12)}$$

En particular sobre el alambre de radio *a* se tiene

$$T(a,t)\approx\frac{\Delta\dot{q}}{4\ \ p\ \ k}\ln\left(\frac{4\ \ k\ \ t}{c'\ \ a^2}\right) \qquad \text{(A-13)}$$

La cantidad de calor $D\dot{Q}$ por unidad de longitud y de tiempo se produce por efecto Joule ya que se hace circular una corriente por el hilo. Luego, $D\dot{Q}$ es la potencia *P* disipada por el hilo por unidad de longitud, con lo cual

$$T(a,t)\approx\frac{P}{4\pi k}\ \ln\left(\frac{4\kappa t}{c'a^2}\right) \qquad \text{(A-14)}$$

APÉNDICE B: Medición de la resistencia del hilo de Pt [6]

Para medir cómo varía la resistencia del hilo se lo ubica en una de las ramas del puente de Wheastone, como se representa en la figura B-1

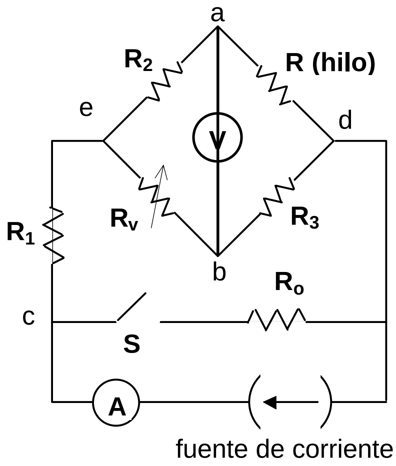

Fig. B-1: Arreglo experimental colocando el hilo de Pt en una de las ramas del puente de Wheastone. **A**: amperímetro; **V**:microvoltímetro

Luego de equilibrar el puente se abre la llave **S** para que una corriente circule por el hilo de platino, calentándolo lo cual provocará un progresivo desbalance del puente.
En equilibrio resulta

$$V_{ab} = 0$$

$$I_{ae} R_2 = I_{be} R_V$$

$$I_{ae}(R_2 + R) = I_{be}(R_V + R_3)$$

(¿Cómo se relaciona I_{ae} con la corriente de la fuente?)
Por lo tanto,

$$\frac{R_2}{R_2 + R} = \frac{R_V}{R_V + R_3} \qquad \text{(B-1)}$$

Además se verifica que

$$I_{ae} R = I_{be} R_3$$

$$I_{ae} R_2 = I_{be} R_V$$

de lo que se deduce

$$\frac{R}{R_2} = \frac{R_3}{R_V} \qquad \text{(B-2)}$$

Cuando se abre la llave S el hilo se calienta (¿Por qué?) y se produce un pequeño desequilibrio del puente debido a que el cambio $R \rightarrow R + \Delta R$ genera una diferencia de potencial entre los puntos a y b dada por:

$$V_{ab} = V_{be} - V_{ae}$$

siendo

$$V_{be} = \frac{R_v}{R_v + R_3} V_{de}$$

$$V_{ae} = \frac{R_2}{(R + \Delta R) + R_2} V_{de}$$

Por lo tanto

$$V_{ab} = \left[\frac{R_v}{R_v + R_3} + \frac{R_2}{(R + \Delta R) + R_2} \right] V_{de} \qquad \text{(B-3)}$$

desarrollando en potencias de *DR*

$$\frac{1}{R_2 + R + \Delta R} \approx \frac{1}{R_2 + R} - \frac{1}{(R_2 + R)^2} \Delta R$$

y utilizando (B-1), (B-3) resulta:

$$V_{cb} \approx \left[\frac{R_v}{R_v + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R} + \frac{R_2 \Delta R}{(R_2 + R)^2} \right] V_{ad} = \frac{R_2 \Delta R}{(R_2 + R)^2} V_{ad} \qquad \text{(B-4)}$$

donde $V_{de} = I_{ae} (R + R_2)$ (B-5)

Luego, a partir de (B-4) y (B-5), y definiendo

$$I_{ae} \equiv I_R$$

se tiene

$$V_{ab} = \frac{R_2 \Delta R}{R + R_2} I_R \qquad \text{(B-6)}$$

donde

$$\Delta R = \frac{\mathrm{d} R}{\mathrm{d} T} \Delta T$$

Empleando la definición del coeficiente de temperatura

$$a = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d} R}{\mathrm{d} T}$$

(B-6) puede reescribirse, finalmente, como:

$$\boxed{V_{ab} = \frac{a R_2 R I_R}{R + R_2} \Delta T} \qquad \text{(B-7)}$$

Esta ecuación establece la relación entre el desbalance del puente y la variación de la temperatura del hilo. El proceso medido es un transitorio entre la situación inicial del equilibrio del puente y la final, dada por un proceso estacionario de transferencia de calor. Considerando la simetría del dispositivo, se puede resolver la ecuación de difusión del calor en el transitorio, determinando la temperatura del hilo en función del tiempo (ecuación (A-14) del apéndice A).

Como se deduce de las ecuaciones (B-7) y (A-14) la caída de tensión entre los puntos a y b es función de la diferencia de temperatura del hilo, que a su vez es función del tiempo. Por lo tanto, graficando V_{ab} *vs* $\ln t$, se obtiene la pendiente b, que permite calcular la conductividad térmica del líquido según:

$$\boxed{k = \frac{I_R^3 \; a \; R_2 \; R^2}{4p \; L \, (R + R_2) \; b}}$$

Bibliografía

1. R.P.Feynman, R.B.Leighton y M.Sands, *The Feynman Lectures on Physics,* Vol. I, Fondo Educativo Panamericano, E.E.U.U. (1971).
2. U.Ingard y W.L.Kraushaar, *Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas*, Ed. Reverté, Barcelona (1973), págs. 445-453.
3. R. C. Weast ed., *Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Cleveland (cualquier edición).
4. P. J. Schneider, "Conduction Heat Transfer", 2ª edición, Adison-Wesley Pub. Co., Massachusetts (1957), págs. 1-4.
5. H.S.Carslaw y J.C.Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2ª edición, Clarendon Press, Oxford (1959), págs. 256-262.
6. J.N.Fox, N.W.Gaggini, R.Wangsani, Am.J.Phys. **55** (1987) 272-274.