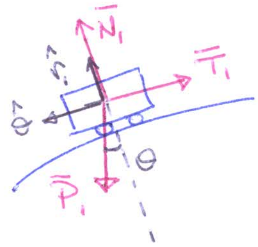
Problema 1

Planteo en primer lugar las ecuaciones de Newton y de vínculo en el caso general. Luego paso a analizar el caso del punto (a).

m_1:

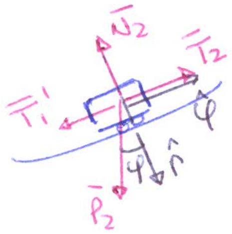


Vínculo: $r_1 = R = cte \Rightarrow \dot{r}_1 = \ddot{r}_1 = 0$

Ecs de Newton: $\hat{r}_1)\ N_1 - m_1 g \cos\theta = -m_1 R \dot{\theta}^2$

$\hat{\theta})\ m_1 g \operatorname{sen}\theta - T_1 = m_1 R \ddot{\theta} \quad (1)$

m_2:

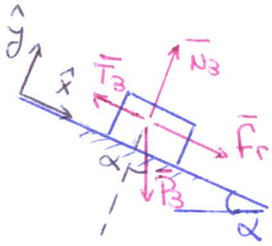


Vínculo: $r_2 = R = cte \Rightarrow \dot{r}_2 = \ddot{r}_2 = 0$

Ecs de Newton: $\hat{r}_2)\ m_2 g \cos\varphi - N_2 = -m_2 R \dot{\varphi}^2$

$\hat{\theta})\ T_2 - T_1' - m_2 g \operatorname{sen}\varphi = m_2 R \ddot{\varphi} \quad (2)$

m_3:



Vínculo: $y = 0 = cte \Rightarrow \dot{y} = \ddot{y} = 0$

Ecs de Newton: $\hat{y})\ N_3 - m_3 g \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_3 = m_3 g \cos\alpha \ (3)$

$\hat{x})\ f_r + m_3 g \operatorname{sen}\alpha - T_3 = m_3 \ddot{x} \quad (4)$

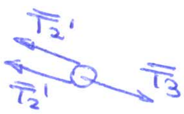
Aclaración: Escribo de manera general $\bar{f}_r = f_r \hat{x}$. En cada caso habrá que ver si se trata de una fuerza de rozamiento estática o dinámica, y si el sentido es el correcto (es decir, si es f_r mayor o menor que cero)

Poleas y sogas ideales $\Rightarrow$ polea 1

$T_1 = T_1' \quad (5)$

polea 2

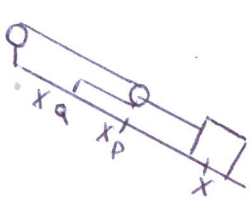
polea 3



$\left.\begin{array}{l} T_2 = T_2' \\ 2T_2' = T_3 \end{array}\right\} \Rightarrow T_3 = 2T_2 \ (6)$

Sogas inextensibles $\Rightarrow$ $L_1 = R\theta + R\frac{\pi}{2} + R\varphi = \pi R = cte$

$\Rightarrow \quad \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} = cte \quad (7)$



$\left.\begin{array}{l} L_2 = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + 2x_p - x_q \\ L_3 = x - x_p \end{array}\right\} \Rightarrow L_2 + 2L_3 = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + 2x - x_q \quad (8)$

Por último, antes de pasar al punto (a), reescribo las ecuaciones (1) a (4) utilizando (5) y (6):

(1): $m_1 g \operatorname{sen}\theta - T_1 = m_1 R \ddot{\theta}$ (1')

(2): $T_2 - T_1 - m_2 g \operatorname{sen}\varphi = m_2 R \ddot{\varphi}$ (2')

(3): $N_3 = m_3 g \cos\alpha$ (3')

(4): $f_r + m_3 g \operatorname{sen}\alpha - 2T_2 = m_3 \ddot{x}$ (4')

a) En este caso, me dicen que el sistema permanece en reposo. Entonces, es

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 = cte \Rightarrow \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0 \\ \theta = \theta_0 = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \\ x = x_0 = cte \Rightarrow \dot{x} = \ddot{x} = 0 \end{array}\right. \qquad (9)$$

Además, la fuerza de rozamiento es estática. No sabemos su sentido (dependerá de las masas y ángulos iniciales). Por lo tanto, la dejamos escrita como en (4'), y puede ser f_r positivo o negativo.

Introduciendo (9) en (1') a (4'):

$$m_1 g \operatorname{sen}\theta - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \operatorname{sen}\theta \qquad (1'')$$

$$T_2 - T_1 - m_2 g \operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 + m_2 g \operatorname{sen}\varphi \qquad (2'')$$

$$f_{re} + m_3 g \operatorname{sen}\alpha - 2T_2 = 0 \Rightarrow f_{re} = 2T_2 - m_3 g \operatorname{sen}\alpha \qquad (4'')$$

(1'') en (2''): $T_2 = (m_1 \operatorname{sen}\theta + m_2 \operatorname{sen}\varphi) g$

Ésta en (4''): $f_{re} = g\,(2m_1 \operatorname{sen}\theta + 2m_2 \operatorname{sen}\varphi - m_3 \operatorname{sen}\alpha)$ (10)

Pero sabemos que es $|f_{re}| \leq \mu_e N_3 \underset{(3')}{=} \mu_e m_3 g \cos\alpha$

Introduciendo esto en (10):

$$g\,|2m_1 \operatorname{sen}\theta + 2m_2 \operatorname{sen}\varphi - m_3 \operatorname{sen}\alpha| \leq \mu_e m_3 g \cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{|2m_1 \operatorname{sen}\theta + 2m_2 \operatorname{sen}\varphi - m_3 \operatorname{sen}\alpha|}{m_3 \cos\alpha} \leq \mu_e}$$

Los vínculos (7) y (8) se escriben en este caso como

$$\begin{cases} \theta_0 + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ L_2 + 2L_3 = R\frac{\pi}{2} - R\varphi + 2x_0 - x_Q \end{cases}$$

b) Se le da a la masa m_1 una velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{\theta} = R\dot{\theta}_0\hat{\theta}$

Es decir, es $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$. (*)

Si derivamos (7), $\dot{\theta} + \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = -\dot{\theta}_0$

Si derivamos (8), $0 = -R\dot{\varphi} + 2\dot{x} \Rightarrow \frac{R}{2}\dot{\varphi} = \dot{x} \Rightarrow \dot{x}_0 = -\frac{R}{2}\dot{\theta}_0$

Es decir que la masa m_3 tiene una velocidad inicial $\dot{\vec{x}}_0 = -\frac{R}{2}\dot{\theta}_0\hat{x}$.

Entonces, la fuerza de rozamiento será dinámica y apuntará en $(+\hat{x})$.

Es decir que en este caso en la ecuación (4') hay que reemplazar $fr \to frd$ con $frd > 0$. Sabemos además que es

$$frd = \mu d N_3 \underset{(3')}{=} \mu d\, m_3 g \cos\alpha$$

Con esto en (3'), resulta

$$\mu d\, m_3 g \cos\alpha + m_3 g \operatorname{sen}\alpha - 2T_2 = m_3\ddot{x} \qquad (4'')$$

Las ecuaciones (1') y (2') no cambian. Combinamos:

$-2(1') + 2(2') + (4'')$:

$$-2m_1 g \operatorname{sen}\theta - 2m_2 g \operatorname{sen}\varphi + m_3 g(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = -2m_1 R\ddot{\theta} + 2m_2 R\ddot{\varphi} + m_3\ddot{x} \qquad (11)$$

Derivando (7) y (8) dos veces (d^2/dt^2):
$$\left.\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\ddot{\varphi} \\ R\ddot{\varphi} &= 2\ddot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\ddot{\theta} = \frac{2}{R}\ddot{x} \qquad (12)$$

Con esto en (11):

$$g\left[m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) - 2m_1\operatorname{sen}\theta - 2m_2\operatorname{sen}\varphi\right] = 4m_1\ddot{x} + 4m_2\ddot{x} + m_3\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = g\,\frac{m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) - 2m_1\operatorname{sen}\theta - 2m_2\operatorname{sen}\varphi}{4m_1 + 4m_2 + m_3}} \qquad (13)$$

c) El vector velocidad de m_1 es $\boxed{\vec{v}_1 = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Por (12) y (13), es

$$\ddot{\theta} = -2\frac{g}{R}\,\frac{m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) - 2m_1\operatorname{sen}\theta - 2m_2\operatorname{sen}\varphi}{4m_1+4m_2+m_3} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Por (7), $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \cos\theta$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -2\frac{g}{R}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) - 2m_1\operatorname{sen}\theta - 2m_2\cos\theta}{4m_1+4m_2+m_3}\,d\theta$$

con $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} &+ 4\frac{g}{R}\,\frac{\theta_0 m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) + 2m_1\cos\theta_0 - 2m_2\operatorname{sen}\theta_0}{4m_1+4m_2+m_3} \\ &- 4\frac{g}{R}\,\frac{m_3(\mu d\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\theta + 2m_1\cos\theta - 2m_2\operatorname{sen}\theta}{4m_1+4m_2+m_3}\end{aligned}}$$