## Ejercicio 5

### a)

El primer ítem nos pide hallar la relación entre n y $k_F$, donde n no es más que la cantidad total de electrones que llenan todos los estados de energía hasta el nivel de energía de Fermi, $\epsilon_F$.

Para plantearlo, primero vamos a recordar que el volumen de **k** permitido que habíamos encontrado en el ejercicio 3 en clase era:

$$v = \frac{(2\pi)^2}{S} \tag{1}$$

donde S va a ser la superficie (recordar que estamos en un gas bidimensional).

Por otro lado, también tenemos que recordar el concepto de esfera de Fermi. Cuando el número de electrones N es lo suficientemente grande, la región ocupada en el espacio **k** es esencialmente una esfera, de radio $k_F$. (Ver Fig. 1)

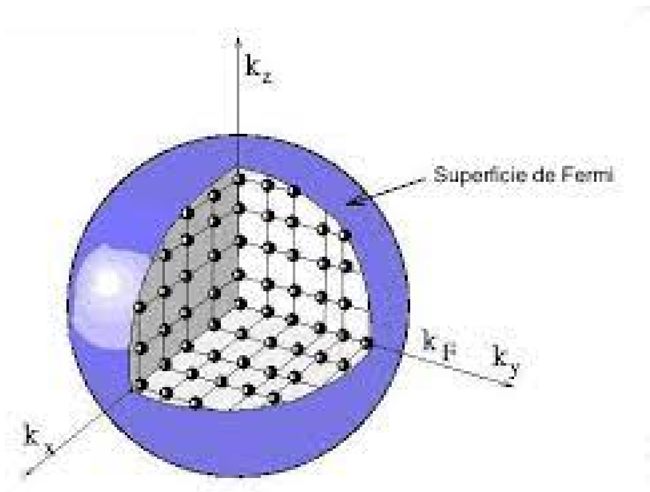


*Figura 1: Esfera de Fermi*

Entonces, queremos calcular $n$, que no es más que la cantidad total de electrones $N$ por unidad de volumen $S$. Para estudiar la cantidad total de electrones, se debe tener en cuenta la cantidad total de estados llenos que tenemos. Esto implica considerar la esfera de Fermi, que en el caso bidimensional, no es más que $\pi k_F^2$. Pero a su vez, se debe dividir por el volumen que ocupa cada uno de estos estados, dado por la Ec.1. Finalmente, tenemos que considerar la degeneración de spín: 2. En resumen, obtenemos:

$$n = \frac{N}{S} = \underbrace{2}_{spin} \frac{1}{S} \left(\pi k_F^2\right) \left(\frac{S}{4\pi^2}\right) \rightarrow \boxed{n = \frac{k_F^2}{2\pi}}$$

Algo que nos va a ser útil después, es reescribir esta expresión en función de la energía de Fermi:

$$n = \frac{m\epsilon_F}{\pi\hbar^2} \tag{2}$$

### b)

El segundo inciso nos pide encontrar, a partir de la expresión para la densidad de estados en función de la energía encontrada en el ejercicio anterior resuelto en clase, que:

$$\mu + k_B T ln(1 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) = \epsilon_F$$

Cuando estamos a una temperatura distinta de cero, vamos a describir a los electrones con una estadística de Fermi-Dirac. La función de distribución está dada por:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{k_B T}}}$$

Con ayuda del enunciado, queremos hacer uso de la expresión encontrada en el punto anterior resuelto en clase, $g(\epsilon)$. Tenemos que tener cuidado, ya que esta expresión, es válida para $\epsilon > 0$. Cuando $\epsilon < 0$, no tengo energías disponibles y obtengo $g(\epsilon) = 0$. Entonces integramos:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \underbrace{g(\epsilon)}_{=\frac{m}{\pi \hbar^2}} d\epsilon$$

$$n = \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}}} d\epsilon$$

Ahora, saco factor común $e^{\frac{E}{k_B T}}$:

$$n = \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}} d\epsilon$$

Y resolviendo esta integral:

$$n = \frac{m}{\pi \hbar^2} ln\left(e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}\right) (-k_B T)|_0^{\infty}$$

$$n = \frac{m}{\pi \hbar^2} \left[ ln(0 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) - ln(1 - e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) \right] (-k_B T)$$

$$n = \frac{m}{\pi \hbar^2} \left[ -\frac{\mu}{k_B T} - ln(1 - e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) \right] (-k_B T)$$

$$n = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \left[ \mu + ln(1 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) k_B T \right]$$

E igualando esta expresión a la ecuación 2 obtenida en el ítem a:

$$\frac{m \epsilon_F}{\pi \hbar^2} = \frac{m}{\pi \hbar^2} \left[ \mu + ln(1 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}}) k_B T \right] \rightarrow \boxed{\epsilon_F = \mu + k_B T ln(1 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}})}$$