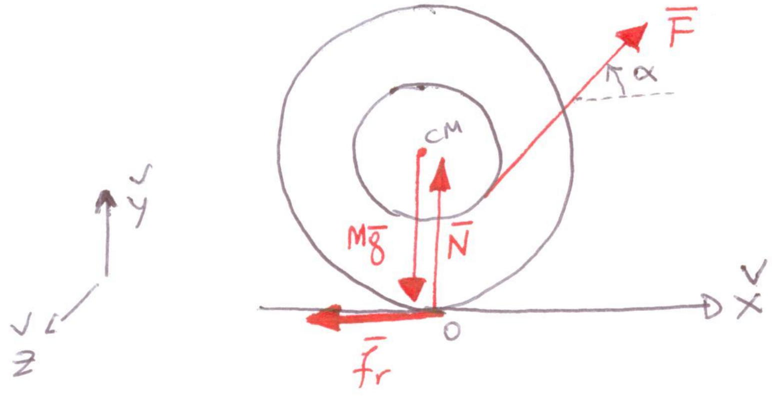
Problema 3

(a) Los fuerzas externas se muestran en el diagrama:



$$\begin{cases} \bar F = F\cos\alpha\,\check x + F\operatorname{sen}\alpha\,\check y \\ \bar N = N\,\check y \\ M\bar g = -Mg\,\check y \\ \bar f_r = -f_r\,\check x \end{cases}$$

La condición de vínculo (rodadura) es $\vec v_0 = 0$

$\Rightarrow$ esto fija una relación entre $\vec v_{CM}$ y $\vec\Omega$

$0 = \vec v_{CM} + \vec\Omega \times (-R\check y)$ $\Rightarrow$ si llamamos $\vec\Omega = \Omega\check z$

$0 = (\dot X_{CM} + \Omega R)\check x$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dot X_{CM} = -\Omega R}$

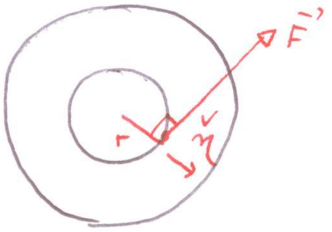
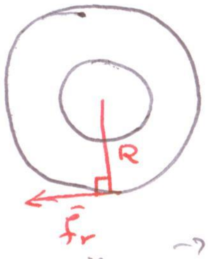
El eje instantáneo de rotación pasa por "O" y es $\parallel$ a $\check z$, ya que justamente lo define la ecuación $\vec v_{eir} = 0$ (notar que $\vec v_0 = 0$)

(b) La ecuación de Newton para el CM:

$$\begin{cases} M\ddot X_{CM} = -f_r + F\cos\alpha \\ M\ddot Y_{CM} = 0 = N - Mg + F\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$ (esto sólo determina N)

La ecuación de movimiento para el impulso angular nos dará otra relación:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{ext,i} \quad ; \quad \text{sólo } \vec{F} \text{ y } \vec{f}_r \text{ hacen torque:}$$

$\sum_i \vec{\tau}_{ext,i} =$  $+$ 

$r\check{\eta} \times \vec{F} = r F \check{z}$

$-R\check{y} \times \vec{f}_r = -R\,\check{y} \times (-f_r)\check{x} = -R f_r \check{z}$

[OJO! : $\check{\eta} \cdot \vec{F} = 0$]

$$\Rightarrow \boxed{I_{CM} \dot{\Omega} \check{z} = (r F - R f_r)\check{z}}$$

$\Rightarrow$ ya estamos listos para resolver el item (c) juntando la información:

$$\begin{cases} \dot{X}_{CM} = -\Omega R \\ M\ddot{X}_{CM} = -f_r + F\cos\alpha \\ I\dot{\Omega} = rF - R f_r \end{cases}$$

sistema cerrado que determina $\ddot{X}_{CM}$, $\dot{\Omega}$ y f_r.

$\Rightarrow$ c sólo tenemos que despejar $\ddot{X}_{CM}$ del sistema anterior, llamando 1 y 2 a las últimas dos ecuaciones:

① $M\ddot{X}_{CM} = -f_r + F\cos\alpha$

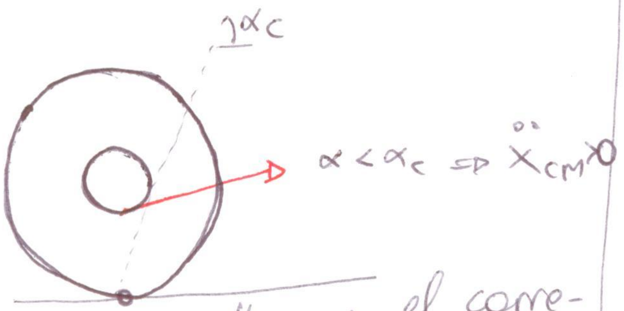
② $kMR^2\left(-\frac{\ddot{X}_{CM}}{R}\right) = rF - Rf_r \Rightarrow -kM\ddot{X}_{CM} = \frac{r}{R}F - f_r$

$\Rightarrow$ ① - ②
$$M\ddot{X}_{CM}(1+k) = F\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{X}_{CM} = \frac{F}{M(1+k)}\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}$$

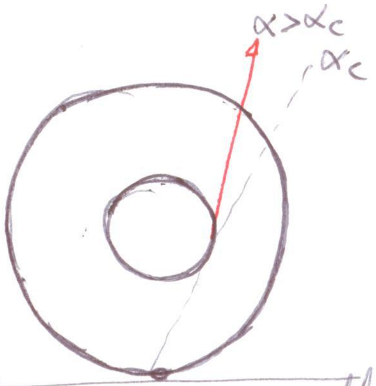
notar $\Rightarrow$ que justamente la aceleración disminuye com $M(1+k)$ (inercia del CM $\oplus$ inercia de la rotación) y dado que $\frac{r}{R} < 1$ $\ddot{X}$ puede cambiar de signo! llamemos α_c / $\cos\alpha_c = \frac{r}{R}$ $\Rightarrow$

si $\alpha < \alpha_c$ $\ddot{X}_{CM} > 0$



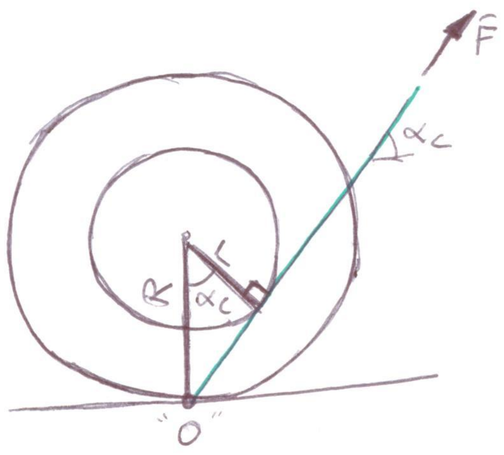
el hilo se enrolla y el carretel va hacia el trabajador

si $\alpha > \alpha_c$ $\ddot{X}_{CM} < 0$



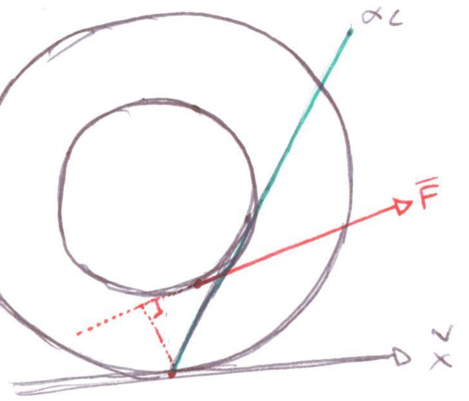
el cable se desenrolla y el carretel se aleja del trabajador

Notar que la condición geométrica para α_c es:



$\sin \alpha_c = r/R$, es decir que es justo cuando la proyección de la fuerza (o la recta que la contiene) pasa por "O". Entonces el cuerpo se mueve hacia adelante ($+\check{x}$) o atrás ($-\check{x}$) según $\vec{F}$ "haga palanca" hacia $+\check{x}$ o $-\check{x}$ respecto de O:

$\alpha < \alpha_c \Rightarrow$ mov hacia $+\check{x}$



$\alpha > \alpha_c$ mov. hacia $-\check{x}$