Desarrollo Multipolar. Medios Materiales.

I.Problemas

1. *a*) Probar que *todos* los momentos multipolares de una distribución de carga esféricamente simétrica son nulos salvo el monopolar.

   b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del centro de momentos. Generalizar.

   c) Dado el desarrollo multipolar de dos distribuciones de carga $\rho_1(\vec{r})$ y $\rho_2(\vec{r})$,¿cómo es el desarrollo multipolar de la distribución total $\rho_1 + \rho_2$? ¿y si son tres ? Generalizar.

2. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga (en el caso de tener momento cuadrupolar, determinar sus ejes principales):

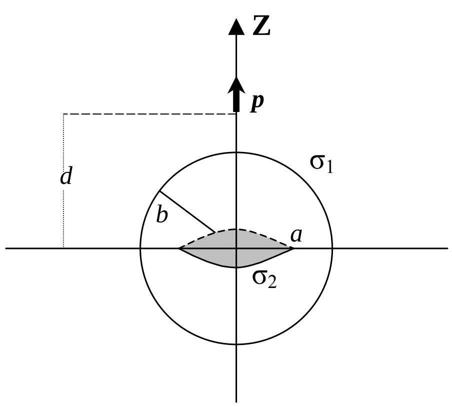
   a) Un disco cargado con una distribución axialmente simétrica respecto de su eje.

   b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error porcentual cometido si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual, a distancias del orden de 1 m de su centro.

   c) Dos distribuciones lineales formadas por una sucesión equiespaciada, a distancia s, de cargas puntuales: la primera consta de tres cargas en el siguiente orden q, $-2q$, q; y la segunda consta de cuatro cargas $-q$, $3q$, $-3q$, q.

   d) Una distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s. En los puntos c) y d) tomar el límite cuando $s \to 0$ con $q.s^2 \to$ cte.

3. Una cáscara esférica de radio b posee una distribución de carga $\sigma = \sigma_0 cos\theta$. En el interior de la cáscara, perpendicular al eje z correspondiente al sistema dibujado en la figura y centrado en el mismo, se encuentra un disco de radio a cuya distribución de carga es $\sigma = \sigma_0(\frac{r}{a} - c)$. Sobre el eje z, a una distancia d del origen, hay un dipolo puntual de intensidad $\vec{p} = p_0\hat{z}$. Encontrar los valores de c y p_0 para que el primer momento multipolar no nulo de la distribución sea el cuadrupolar y calcular , en ese caso el potencial para puntos lejanos.



4. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\vec{P}$ perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límite para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.

5. La distribución de carga $\rho(\vec{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13}cm. Si bien el potencial de los núcleos se aproxima en general por $\phi = Ze/r$, ésto equivale a suponer que $\rho(\vec{r})$ está distribuído de forma esféricamente simétrica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto de cero. Esto equivale a decir que la distribución $\rho(\vec{r})$ se aparta de una esfera.

   a) Para simplificar, considere $\rho(\vec{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b. Calcule Q respecto de ejes apropiados, usando que la carga total es $q = Ze$ (*Sugerencia:* si usa z como el eje de simetría del elipsoide, note que el cambio de variables $u = x/b$, $v = y/b$, $w = z/a$, convierte el dominio de integración en la esfera de radio 1).

   b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz}?

   c) Ponga números: para $Z = 63, Q_{zz}/e = 2{,}5\ 10^{-24}\text{cm}^2$. Suponiendo que el radio medio es $R = (a+b)/2 = 7\ 10^{-13}$cm, determinar la diferencia $(a-b)/R$.

   d) Un núcleo con momento cuadrupolar Q_{zz} se halla en un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con un gradiente $\partial_z E_z \neq 0$. Muestre que la energía de interacción entre el cuadrupolo y el campo es:

$$W = -\frac{Q_{zz}}{4}\partial_z E_z$$

6. *a*) En un medio de constante dieléctrica ϵ se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en todo punto del espacio, y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dielétrico.

   b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a una batería de voltaje V. Resolver lo mismo del caso anterior.

   Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la forma de dependencia de los campos con ϵ. Explicar las causas de esta diferencia.

7. Un capacitor de placas paralelas y diferencia de potencial V se coloca en posición vertical ¿Hasta que altura llega un líquido dieléctrico que sube por entre las placas? *Ayuda:* ver Landau vol. 8, cap. 2.

8. Por un cable rectilíneo de radio a circula una corriente I. Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ($\mu = 1000$) de radio interior b y exterior c. Dentro y fuera del cilindro hay vacío. La permeabilidad del cable vale 1.

   a) Calcular y graficar $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en todo punto del espacio.

   b) ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona $r > a$?

   c) Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.

   d) Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.

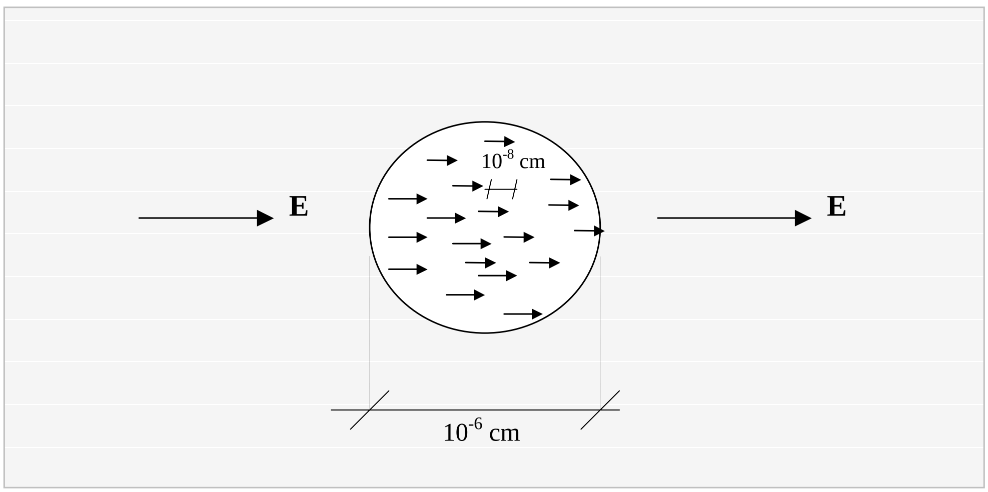
9. Un método (ideal) para medir el campo eléctrico en un punto de un medio material consiste en abrir pequeñas cavidades centradas en ese punto y medir el campo eléctrico en su interior. Suponga un medio dieléctrico en el que existe un campo eléctrico uniforme.

a) Se abre una cavidad en forma de paralelepípedo muy achatado, o sea, con una dimensión mucho menor que cualquiera de las otras dos. Determine el campo en el centro de la cavidad y la densidad superficial de carga inducida, para las dos orientaciones siguientes: i) el corte es paralelo al campo; ii) el corte es perpendicular al campo.

b) Repita el análisis del punto anterior si la cavidad es de forma esférica. ¿Dependen los resultados del radio de la esfera?

10. Para relacionar la suceptibilidad χ de una substancia con la polarizabilidad molecular (es decir, el momento dipolar inducido en una única molécula ante un campo exterior), debe relacionarse el campo macroscópico promedio $\vec{E}$, con el que siente efectivamente una molécula a nivel microscópico, $\vec{E}_m$. Para ello existe el siguiente modelo:

$\vec{E}_m$ se descompone como $\vec{E}_m = \vec{E}_c + \vec{E}_p + \vec{E}$, donde $\vec{E}_c$ es el campo debido a las otras moléculas cercanas que en promedio tendrían un momento dipolar igual al de la molécula en cuestión y que se intentará considerar explícitamente. $\vec{E}_p$ es el campo debido a las moléculas elejadas y que podrá considerarse directamente en su aproximación macroscópica: campo en el centro de un hueco esférico debido a una densidad $\vec{P}$ de momento dipolar. La contribución debido a $\vec{E}_p$ se calculó en el problema anterior.



a) Para determinar $\vec{E}_c$, considere a las moléculas vecinas como dipolos paralelos $\vec{p}$ situados simétricamente alrededor de la molécula en cuestión, en posiciones $\vec{r}_m = (ai, aj, ak), i, j, k \in \mathcal{Z}$ (formando una especie de red cúbica). Con las dimensiones típicas elegidas hay del orden de $(10^2)^3$ dipolos a considerar. Demuestre que en ese caso $\vec{E}_c = 0$.

b) La polarizabilidad γ de una molécula aislada se define como $\vec{p}_{mol} = \gamma\vec{E}$. Usando el resultado del punto anterior y los datos: $\vec{P} = \chi\vec{E}$ y $\vec{P} = N < \vec{p}_{mol} >$, con N = número de partículas por unidad de volumen; deduzca la relación entre γ y χ de Clausius - Massotti:

$$\chi_e = \frac{N\gamma}{1 - \frac{4}{3}\pi N\gamma}$$

II. Preguntas conceptuales

1. *a*) ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal?

b) ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? '?y el cuadrupolo?

c) ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?

2. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes distribuciones?

   a) Un dipolo en la dirección z rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.

3. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente $\vec{M}$:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

   Como $\vec{B} = \mu\vec{H}$, tenemos que:

$$\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{\mu - 1}\vec{M}$$

   O sea que siempre $\vec{B}$ es proporcional al $\vec{M}$. ¿Cuál es el error en ese razonamiento?, o es que acaso está bien?

4. Encontrar el campo magnético en todo punto del espacio producido por un toro de sección circular con una magnetización uniforme de la forma $\vec{M} = M_0\hat{\phi}$. ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad μ?