

Relatividad Especial y Formulación Covariante del Campo Electromagnético.

I. Problemas

1. * Supongamos 2 referenciales inerciales S y S' en movimiento relativo, con velocidad \vec{V} , uno con respecto al otro. En O y O' (orígenes de S y S' , respectivamente) hay sendos observadores que pasan uno frente al otro cuando $t = t' = 0$. El eje $O'x'$ de S' se desliza sobre el eje Ox de S (o sea \vec{V} tiene la dirección de Ox y $O'x'$). En los puntos del eje Ox con $x = -d$ y $x = +d$ hay sendos relojes en reposo en el sistema S . El observador que está en O quiere sincronizar estos relojes con el suyo propio y para ello envía simultáneamente desde O en $t = 0$ dos rayos de luz, uno hacia adelante y otro hacia atrás, según el eje x . Cada reloj tiene un mecanismo que le permite detectar el rayo de luz, y al hacerlo el reloj queda puesto automáticamente a la hora $t = d/c$. Para verificar que los mecanismos de sincronización que tiene cada reloj han funcionado correctamente el observador en O envía dos ayudantes suyos, cada uno de los cuales lleva en la mano un reloj sincronizado con el del observador O , hacia los lugares de S donde están colocados los relojes fijos (en $x = -d$ y $x = +d$), debiendo cada ayudante verificar que el reloj fijo que encuentra y que el que lleva en su mano están sincronizados. Los ayudantes se mueven a una velocidad \vec{v} muy pequeña ($v \ll c$) por lo cual se puede despreciar el atraso de los relojes respecto del reloj fijo en O (tal y como se ven las cosas desde S). Los ayudantes verifican que al llegar a los relojes fijos estos se encuentran sincronizados con los suyos.

- a) Según ve las cosas el observador que está en O' , ¿están los relojes fijos en $x = \pm d$ sincronizados entre sí y con el del observador en O ?. Responder: i) Usando que para todos los observadores la luz tiene siempre velocidad c , ii) Usando las transformaciones de Lorentz. ¿En qué instante llega el rayo de luz a cada reloj, según ven las cosas los observadores de O' y O ?
- b) ¿Cómo explica el observador de O' que los ayudantes de su colega de O encuentren los relojes fijos de S sincronizados con los suyos?. Cuando el observador de O' pasa frente al reloj fijo de S , en $x = +d$, ¿qué hora marca este reloj?, ¿y qué hora el reloj del observador en O' ?. ¿Cómo explican las cosas los observadores de O y O' .
- c) ¿Cuál es el tiempo propio entre el instante en que O' pasa frente a O y el instante en que pasa frente al reloj de S que está en $x = +d$?, ¿y entre el instante en que es emitido el rayo de luz desde O y el instante en que el reloj en $x = d$ recibe la luz?. El intervalo entre las dos llegadas de la luz a $x = +d$ y a $x = -d$ ¿es espacial o temporal?, ¿cuánto vale?.

2. *

- a) El día que cumplía 21 años Pedro se despide de su mellizo Pablo, que queda en tierra, para emprender un viaje espacial en un cohete que se mueve con

6. a) A partir de la expresión del tensor de intensidad del campo electromagnético, obtener las leyes de transformación de los campos eléctrico y magnético al cambiar de sistema de referencia. Analizar los siguientes casos particulares: 1) $\vec{B} = 0$; $\vec{E} \parallel \vec{v}$, 2) $\vec{B} = 0$; $\vec{E} \perp \vec{v}$, 3) $\vec{E} = 0$; $\vec{B} \parallel \vec{v}$, 4) $\vec{E} = 0$; $\vec{B} \perp \vec{v}$.
- b) Demostrar que si \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares en un sistema de referencia, entonces también lo son en cualquier otro.
- c) Probar que si $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ en un sistema inercial de referencia, ésto se cumple en cualquier otro sistema.
- d) Mostrar que si \vec{E} es perpendicular a \vec{B} y $|\vec{E}| \neq |\vec{B}|$, entonces hay un sistema en el cual sólo hay campo eléctrico o solamente magnético. ¿Siempre hay solución? si es así, ¿ésta solución es única?

Sugerencia: para los últimos tres puntos, conviene pensar en cuáles son los invariantes que pueden construirse a partir del tensor intensidad de campo electromagnético.

7. * En un sistema de referencia S , los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.
- a) Encontrar un sistema S' tal que sólo haya campo eléctrico.
- b) Encontrar un sistema S' tal que sólo haya campo magnético.
- c) Los puntos anteriores, ¿siempre tienen solución? Si es así, ¿ésta solución es única?
8. Un cilindro de longitud infinita tiene densidad uniforme de carga y por él circula, además, una corriente uniforme paralela al eje del cilindro.
- a) Encontrar *el* sistema de referencia en el cual hay sólo campo magnético o eléctrico. ¿Por qué es único?
- b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.
9. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.
- a) Calcular los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra de dos maneras distintas: i) a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, ii) por transformación directa de los campos.
- b) Ahora se tienen dos barras como la anterior dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza *por unidad de longitud* con que se atraen en un sistema de referencia que se mueve paralelo a las barras (S') es la misma que en el sistema en el que las barras están en reposo (S), por dos métodos: i) en base a las interacciones electrostáticas y magnetostáticas en S' , más las leyes de transformación de los campos, ii) demostrando que el objeto f^μ definido según:

$$f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu$$

es un cuadrivector, y es la generalización covariante de la fuerza de Lorentz.

- c) Como “yapa” del punto anterior obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.
10. Considerar un dipolo magnético puntual que se mueve con velocidad \vec{v} respecto de un sistema de referencia S . En S' , el sistema en el cual el dipolo está en reposo, el cuadrivector potencial tiene componentes:

$$A^0 = 0, \quad A^i = \frac{(\vec{m}' \times \vec{x}')^i}{|\vec{x}'|^3}.$$

Demostrar que a primer orden en β en el sistema S aparece un dipolo eléctrico cuyo momento es $\vec{p} = \vec{\beta} \times \vec{m}'$.

11. a) Transformando el campo coulombiano, halle los campos \vec{E} y \vec{B} debidos a una carga q que se mueve con velocidad \vec{V} .
- b) Sean dos cargas que se mueven con velocidad constante sobre trayectorias mutuamente perpendiculares. Usando el resultado del inciso (a) determine las fuerzas de Lorentz sobre cada carga en el instante en que una carga cruza la trayectoria de la otra. Compruebe que las fuerzas no son iguales y opuestas. ¿Qué sucede con la conservación de la cantidad de movimiento?
12. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x . Tomar como condición inicial $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no-relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.
13. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo magnético uniforme y estático.
14. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un fondo electromagnético uniforme y estático, tal que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico. Considerar los tres casos posibles:

a) $|\vec{E}| > |\vec{B}|$

b) $|\vec{E}| < |\vec{B}|$

c) $|\vec{E}| = |\vec{B}|$

Sugerencia: En los casos a) y b) hacer transformaciones de Lorentz adecuadas para reducir el problema a los ejercicios anteriores.

II. Preguntas conceptuales

1. ¿Es posible que una partícula viaje con velocidad mayor que c ?
2. ¿Es posible enviar señales a velocidades mayores que la de la luz? ¿Qué ocurre con la causalidad? (Visualizarlo en un diagrama de espacio-tiempo).

3. Sea una barra rígida muy larga que se traslada con velocidad v formando un ángulo α con el eje fijo ox . Determine la velocidad ω del punto a de intersección de la barra con ox . ¿Puede ser $\omega > c$? ¿Puede utilizarse este sistema para enviar señales a velocidades mayores que c ?
4. Un faro rota uniformemente con velocidad angular ω , emitiendo una señal luminosa. Si tomamos 2 puntos a y b muy alejados del faro, la señal pasa de a a b a velocidad mayor que c . ¿Contradice esto la Relatividad?
5. ¿Es compatible con la Relatividad la existencia de cuerpos perfectamente rígidos?
6. ¿En qué caso se conserva y en qué caso no, la dirección de una barra al hacer una transformación de Lorentz?
7. Sea una regla en reposo, que mide l . Si ahora se mueve con velocidad v y la mido nuevamente, ésta se contrae según la ley $l' = l/\gamma$. ¿Sería esta una manera de detectar un sistema de referencia privilegiado, contrario a lo que sostiene el principio de relatividad?
8. En un sistema de referencia S , el intervalo entre dos eventos dados es de tipo espacial. ¿Es posible encontrar un sistema S' tal que el intervalo entre los mismos eventos sea de tipo temporal?
9. Un corredor se mira en un espejo varios metros delante suyo. Si fuera con velocidad c , ¿qué vería?
10. ¿Cómo pueden graficarse los ejes de un sistema S' que se mueve con respecto a S en el diagrama de espacio-tiempo de S' ? ¿Qué ocurre con el cono de luz en ambos sistemas?. ¿Cómo se ve en estos diagramas la relatividad de la simultaneidad?
11. ¿Puede un fotón desintegrarse en 2 fotones?, ¿y en un par electrón-positrón?. ¿Puede un pión neutro Π^0 desintegrarse en 2 fotones?
12. El vector de onda de una onda electromagnética plana, ¿es un invariante?. ¿Qué tiene que ver esto con el efecto Doppler?
13. ¿Por qué en el marco de la relatividad espacial no tiene sentido hablar de campo eléctrico o magnético, sino del campo electromagnético?
14. En el caso de una carga en movimiento, si uno compara las líneas de campo eléctrico vistas desde el sistema S' en el que la carga está en reposo, con las líneas de campo vistas desde S , se ve que en este último caso las líneas se encuentran comprimidas en la dirección del movimiento. ¿No se contradice esto con el hecho que E_{\parallel} se conserva?
15. ¿Cómo podrían escribirse las leyes de conservación de la energía y del impulso del electromagnetismo en forma covariante?
16. ¿Qué relación hay entre la masa nula del fotón, la invariancia de gauge del electromagnetismo, y el alcance de la fuerza electrostática????