(a) La ecuación de estado y la entropía se pueden hallar a partir de las derivadas de la energía libre de Helmholtz en función de la temperatura y las variables extensivas, $A(L,T)$. Para ver cómo, necesitan escribir el dA para este sistema, sabiendo que $A = U - TS$ y por lo tanto

$$dA = dU - T\,dS - S\,dT,$$

para lo cual es necesario encontrar la expresión de $dU = \delta Q - \delta W$. En un proceso reversible $\delta Q_{\text{rev}} = T\,dS$ y, si f es la tensión que ejerce la barra, entonces

$$\delta W_{\text{rev}} = f\,dL,$$

con lo cual $dU = T\,dS - f\,dL$ y por lo tanto

$$dA = -S\,dT - f\,dL.$$

Así, ven que $S(T,L) = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_L$ y $f(T,L) = -\left(\frac{\partial A}{\partial L}\right)_T$, que son las derivadas de la expresión $A(L,T)$ del enunciado. Efectuándolas queda

$$S(T,L) = 3\gamma T^2 - \lambda\left(\frac{L^2}{2L_0} + \frac{L_0^2}{L}\right) \text{ y} \tag{1}$$

$$f(T,L) = \lambda T\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right). \tag{2}$$

La ecuación (2) es la ecuación de estado que buscan y (1) es la expresión de la entropía.

La capacidad calorífica a longitud constante se puede encontrar por su definición a partir de las derivadas de la entropía: $C_L = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L$. Al hacer la cuenta, que involucra derivar (1), queda

$$C_L = 6\gamma T^2. \tag{3}$$

(b) La expresión para dA es la que necesitaron hallar para el inciso anterior:

$$dA = -S\,dT - f\,dL. \tag{4}$$

El carácter de diferencial exacto de dA viene dado por la igualdad de las derivadas segundas mixtas de A:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial L \partial T} = \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial L},$$

que para el dA presente equivale a

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L. \tag{5}$$

Lo que se pide es verificar explícitamente esta condición, lo cual puede hacerse derivando las expresiones que encontraron en (a):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \lambda\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right) \text{ y} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L = \lambda\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right). \tag{7}$$

(c) Les piden $\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f$, pero la derivada parcial involucrada requiere la expresión de $L(T,f)$. Uno podría intentar obtenerla a partir de despejar L en la ecuación de estado $f = f(T,L)$; algunos llegaron a ver que no iban a poder hacerlo. Lo cierto es que para una resolución satisfactoria es necesario buscar alguna otra forma de expresar la derivada pedida en términos de variables de estado.

Por ejemplo, se puede tomar la ecuación de estado (2) y aplicar $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_f$ miembro a miembro:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_f = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left[\lambda T\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right)\right]\right)_f,$$

donde, por ejemplo, $\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{L^2}\right)_f = -\frac{2}{L^3}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f$ (regla de la cadena):

$$0 = \lambda\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right) - \lambda T\left(\frac{2L_0^2}{L^3} + \frac{1}{L_0}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f,$$

de donde pueden despejar $\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f$:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f = \frac{\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}}{T\left(\frac{2L_0^2}{L^3} + \frac{1}{L_0}\right)}.$$

Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}}{T\left(\frac{2L_0^2}{L^2} + \frac{L}{L_0}\right)}. \tag{8}$$

Comentarios

- El enunciado del ejercicio sólo aclara que f es la *tensión de la barra*, sin aclarar si es la tensión que *se ejerce* sobre la barra o la tensión que *la barra ejerce*. Es cuestión de convención: la decisión la toma cada uno. En esta resolución se eligió la segunda opción. Seguir la otra convención es hacer el reemplazo $f \to -f$ en lo aquí hecho, lo cual agrega un signo menos, por lo menos, en (2) y en la condición (5).

- Para hallar C_L, algunos han intentado aplicar la definición con las derivadas de la energía $C_L = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L$, que es igual de válida. Es un poco más de trabajo, porque involucra tener que recuperar $U = A + TS$ a partir de $A(T,L)$ y de (1), lo cual finalmente debería dar $U(T,V) = 2\gamma T^3$, que les permite llegar de igual manera a (3).

- En el cálculo de α llegamos a una expresión $\alpha(T,L)$. Según las propiedades que hayan usado, ustedes pueden haber llegado a una expresión $\alpha(f,L)$, que es igual de válida. Para pasar de una a otra sin tener que repetir toda la deducción, primero despejan T (o $1/T$) de la ecuación de estado:

$$\frac{1}{T} = \frac{\lambda\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right)}{f}$$

y luego la reemplazan en (8):

$$\alpha(f,T) = \frac{\lambda\left(\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0}\right)^2}{f\left(\frac{2L_0^2}{L^2} + \frac{L}{L_0}\right)}.$$

También usando la ecuación de estado, es posible pasar de $\alpha(f,L)$ a $\alpha(T,L)$.