Problema 3: En un tiempo $t = 0$ la función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\psi = A\left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right)$$

donde las φ_{nlm} son las autofunciones normalizadas de $\hat{H}$.

a) Normalizar ψ
b) Calcular $\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle, \left\langle \hat{L}_z \right\rangle$ y $\left\langle \hat{H} \right\rangle$.
c) Hallar ψ para un tiempo t cualquiera.
d) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el sistema con $\ell = 1$, $m = -1$ como una función del tiempo?

Solución:

a) Dado que ψ está escrito en términos de los $\phi_{n\ell m}$, la normalización da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{10}} \tag{1}$$

b)

$$< L^2 >= \frac{1}{10}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right)^* L^2 \left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right) \tag{2}$$

$$< L^2 >= \frac{1}{10}\hbar^2 \left(0 + 2 + 4 + 6\right) = \frac{6}{5}\hbar^2 \tag{3}$$

$$< L_z >= \frac{1}{10}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right)^* L_z \left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right) \tag{4}$$

$$< L_z >= \frac{1}{10}\hbar \left(0 + 0 + 2 - 3\right) = -\frac{1}{10}\hbar \tag{5}$$

$$< H >= \frac{1}{10}\left(4E_2 + E_2 + 2E_2 + 3E_2\right) = E_2 = -\frac{1}{8}\frac{me^4}{\hbar^2} \tag{6}$$

como debía ser.

c) La función de onda en función del tiempo es:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\varphi_{200} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1}\right)\exp\{-iE_2 t/\hbar\}$$

d) La probabilidad de medir el estado con $\ell = 1, m = -1$ es 0,3.