Problemas de Física 4 [§]
Partículas Idénticas

1. **Operadores Permutación**
   Se define el operador permutación para un sistema de dos partículas, no idénticas pero con espacio de estado isomórficos (o sea, se pueden representar usando una base común):

   $$\hat{P}_{21}|u_i u_j\rangle \equiv |u_j u_i\rangle$$

   Demostrar:

   (a) $\hat{P}_{21}^2 = 1$
   (b) $\hat{P}_{21}$ es su propio inverso
   (c) $\hat{P}_{21}$ es Hermítico
   (d) $\hat{P}_{21}$ es unitario
   (e) sus autovalores son reales (hallarlos!).

2. **Proyectores de simetría ("simetrizadores")**
   En el mismo sistema anterior definimos los operadores:

   $$\hat{S} \equiv \frac{1}{2}(1 + \hat{P}_{21}) \quad \hat{A} \equiv \frac{1}{2}(1 - \hat{P}_{21})$$

   Demostrar:

   (a) $\hat{S}^2 = \hat{S}$
   (b) $\hat{A}^2 = \hat{A}$
   (c) $\hat{S}^\dagger = \hat{S}$
   (d) $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
   (e) $\hat{S}\hat{A} = \hat{A}\hat{S} = 0$
   (f) $\hat{S} + \hat{A} = 1$
   (g) Para un ket arbitrario $|\psi\rangle$,
      i. $\hat{S}|\psi\rangle$ es simétrico
      ii. $\hat{A}|\psi\rangle$ es antisimétrico
      iii. $\hat{S}\hat{P}_{21}|\psi\rangle = \hat{S}|\psi\rangle$
      iv. $\hat{A}\hat{P}_{21}|\psi\rangle = -\hat{A}|\psi\rangle$

3. **Transformación de observables por permutaciones**
   Demostrar que para un sistema de dos partículas como el anterior:

   (a) $\hat{P}_{21}\hat{B}(1)(\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2)$
   (b) $\hat{P}_{21}[\hat{B}(1) + \hat{C}(2)](\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2) + \hat{C}(1)$
   (c) $\hat{P}_{21}[\hat{B}(1)\hat{C}(2)](\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2)\hat{C}(1)$
   (d) si un observable es simétrico, conmuta con el operador de permutación

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII

4. **Operadores de permutación para N partículas**
   (a) Encontrar todos los operadores de permutación posibles para un sistema de 3 partículas
   (b) Demostrar que $\hat{P}_{123} = 1$
   (c) Demostrar que $(\hat{P}_{312})^{-1} = \hat{P}_{231}$
   (d) Encontrar algúnos de estos operadores que sean igual a sus inversas
   (e) Demostrar que $\hat{P}_{312}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{321}$
   (f) Calcular $[\hat{P}_{312}, \hat{P}_{132}]$
5. **Operadores de transposición para N partículas**
   Demostrar que el operador de permutación $\hat{P}_{312}$ se puede escribir como un producto de operadores de transposición:
   $$\hat{P}_{312} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213} = \hat{P}_{321}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{213}\hat{P}_{321} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213}(\hat{P}_{132})^2 = \cdots$$
6. **Simetrizadores para N partículas**
   (a) Encontrar la expresión para los operadores de simetría para el caso de N partículas
   (b) De las propiedades enunciadas para los proyectores de simetría en sistemas de dos partículas, ¿cuáles se siguen cumpliendo en sistemas de N partículas?
7. Suponer dos partículas que no interactúan entre sí en un pozo de potencial infinito (unidimensional). Encontrar las funciones de onda de los primeros estados (incluir la degeneración) y sus correspondientes energías para los casos en que:
   (a) las partículas son distinguibles
   (b) las partículas son Fermiones idénticos
   (c) las partículas son Bosones idénticos
8. Considerar 3 partículas cuyos estados individuales ortonormales son $|\varphi\rangle$, $|\xi\rangle$ y $|\omega\rangle$. Encontrar la función de onda correspondiente, cuando las partículas son Bosones y en los casos:
   (a) $|\varphi\rangle \neq |\xi\rangle \neq |\omega\rangle$
   (b) $|\varphi\rangle = |\xi\rangle \neq |\omega\rangle$
   (c) $|\varphi\rangle = |\xi\rangle = |\omega\rangle$
9. Repetir el problema anterior, pero ahora las partículas son Fermiones.
10. Calcular la energía del estado fundamental de un sistema compuesto por N partículas de spin 1/2. Calcular la energía de Fermi.

11. Dos partículas de igual masa están confinadas por un potencial de oscilador armónico unidimensional, cuya distancia característica es x_c. Una de las partículas se encuentra en el estado $n = 0$, y la otra en $n = 1$.

    (a) Encontrar la raiz cuadratica media (*root mean square*) de la distancia entre las partículas

    i. para partículas no–idénticas

    ii. para Bosones idénticos

    iii. para Fermiones idénticos

    (b) Calcular la probabilidad de encontrar ambas partículas en un rango $[x_c/5]$ alrededor del centro

    i. para partículas no–idénticas

    ii. para Bosones idénticos

    iii. para Fermiones idénticos

12. Suponer un átomo de He en el cual un electrón está en el estado ψ_{100m_s} y el otro en el $\psi_{21m_lm_s}$.

    (a) Construir los estados posibles (de dos electrones)

    (b) Describir el espectro, incluyendo la repulsión entre los dos electrones

13. Dos electrones se mueven en un pozo infinito unidimensional.

    (a) Escribir la función de onda (y su energía) del estado fundamental, si suponemos que el sistema está en el estado triplet

    (b) Suponer que está en el singlet