Problemas [§]
La Ecuación de Schrödinger (2): Problemas Difíciles

1. **Uno más de barrera de potencial unidimensional**
   Realizar el siguiente cambio de variables:

$$\alpha_{\pm} \equiv \frac{k_1^2 \pm k_2^2}{2k_1k_2},$$
$$\beta \equiv 2k_2 a,$$
$$\frac{F}{A} \equiv \sqrt{T}e^{i\phi_T},$$
$$\frac{B}{A} \equiv \sqrt{R}e^{i\phi_R}.$$

   donde A, B y F son las amplitudes de la onda incidente, reflejada y transmitida, a es el ancho de la barrera, k_1 y k_2 son los números de onda en la zona libre y en la barrera. Suponer que la energía de la partícula es mayor que el alto de la barrera y demostrar:

   (a) $T + R = 1$
   (b) $\phi_T = \phi_R - n\frac{\pi}{2}$

2. **Pozo infinito con división opaca**
   Considerar un pozo infinito de potencial, entre $-a$ y a, en el cual introducimos una pared opaca en $x = 0$. La pared opaca se puede obtener como la idealización de una barrera de ancho 2ϵ (o sea, entre $x = -\epsilon$ y $x = \epsilon$) y de altura V_0, con $\epsilon \to 0$ y $V_0 \to \infty$. El producto $\epsilon V_0 \equiv \Omega$, donde Ω es el *parámetro de opacidad* de la pared divisora, se mantiene constante.
   Considerar el efecto que produce la división opaca en las soluciones del pozo infinito, en función del parámetro Ω.

3. **Potentiales sin reflexión**
   Considerar el potencial del tipo *Pöschl–Teller*:

$$V(x) = -\frac{\hbar a^2}{m}\mathrm{sech}^2(ax)$$

   donde a es una constante real positiva.

   (a) Demostrar que el $\Psi_0 = A\,\mathrm{sech}(ax)$ es una posible solución de la ecuación de Schrödinger para éste potencial (Ψ_0 es el estado fundamental). Calcular E_0, normalizar la función, y dibujarla.
   (b) Demostrar que

$$\Psi_0 = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx} \qquad\qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

   es solución para toda $E > 0$.

      i. ¿Cuál es la forma asimptótica de estas funciones?
      ii. Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión R y T.
      iii. Encontrar otros estados ligados. (Ayuda: utilizar la matriz de scattering (S–matrix)).

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

4. **Potencial con Filtración**
   Considerar el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \alpha\delta(x-a) & x \geq 0 \end{cases}$$

donde a, y α son constantes reales positivas, con sus unidades apropiadas. δ es la distribución de Dirac. La partícula se encuentra inicialmente dentro del sector $0 < x < a$, pero debido al efecto túnel, gradualmente se "filtra" a través de la barrera δ. Si bien el problema tiene dependencia temporal, vamos a resolverlo en el formalismo independiente del tiempo.

   (a) Resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Proponer condiciones de contorno adecuadas determinando cierta "energía" (ponemos "E" y no E, ya que suponemos que la energía es compleja).

   (b) Si definimos la energía como $E = E_0 + i\Gamma$, calcular el tiempo característico de filtración

   (c) Habíamos determinado en algún problema anterior que si la ecuación de Schrödinger es separable, la energía debe ser real. ¿Cómo se explican estos resultados?

5. **Varias barreras de potencial**
   Demostrar la ecuación **B10** del artículo de Tambini *et al.*: *Dymanics of quantum collapse in energy measurements*, Physical Review A **51**, 967 (1995). Para los que se animen, demostrar **B15**.