

Problemas de Física 4

§ Spin

1. Spin

- (a) Sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los autoestados de spin $1/2$. Encontrar:
- (a) $S^2|\alpha\rangle$ (b) $S^2|\beta\rangle$ (c) $S_z|\alpha\rangle$ (d) $S_z|\beta\rangle$
 (e) $S_+|\alpha\rangle$ (f) $S_-|\alpha\rangle$ (g) $S_x|\alpha\rangle$ (h) $S_y|\alpha\rangle$
- (b) Representar (en la representación anterior) las matrices:
- (a) S^2 (b) S_+ (c) S_-
 (d) S_z (e) S_x (f) S_y
- (c) Comprobar que las matrices anteriores cumplen la relación de conmutación que define un momento angular
- (d) Supongamos que se mide S_z en un estado χ y se obtiene el valor $\hbar/2$ con probabilidad $|a|^2$, y el valor $-\hbar/2$ con probabilidad $|b|^2$. ¿Qué valores de S_x se podrán medir, y con qué probabilidad?

2. Matrices de Pauli

- (a) Calcular las trazas, los determinantes, y las relaciones de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_i$, ($i = x, y, z$).
- (b) Calcular $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$
- (c) Sea una matriz X de 2×2 (no necesariamente Hermítica ni unitaria), que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde \mathbf{a} es un vector 3-d.

- i. Hallar $\text{Tr}(X)$ y $\text{Tr}(\sigma_k X)$ en función de a_i
 ii. Hallar a_i en términos de los elementos de matriz X_{ij}
- (d) Sean $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ dos operadores vectores en tres dimensiones que conmutan con $\hat{\sigma}$. Demostrar que

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}})$$

3. Interacción Spin-Orbita

- (a) La interacción del spin del electrón con el momento angular de su propia órbita introduce un término adicional en la energía, que se puede escribir como

$$E_{SL} = a\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

Calcular el valor de E_{SL} para los casos $S_z = \pm \frac{1}{2}$, y encontrar sus diferencias. Calcular la diferencia energética (en función de a) para el caso específico $L = 2$.

§ <http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4>