Q 1

Un corte radical...

Q 1

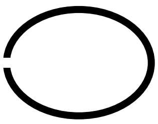
Bibliografía

Robert M. Eisberg

Fundamentos de Fisica Moderna

Black Body

Cuerpo Negro



Sea a la "absorbancia"

Sea r la "reflectividad"

Cuando incide la luz sobre una superficie

$$a + r = 1$$

Cuerpo negro

$$a = 1$$

Contenedor isotermico

Cuerpos a temperatura T emiten radiacion

En el interior de un contenedor isotermico el flujo de radiacion es isotropico

Si no fuese asi se puede contruir una maquina que vioele el segundo ppo simplemente poniendo absorbedores en los lugares adecuados

Superficie negra ideal absorbe toda la radiacion que le llega (no refleja nada)

En un contenedor isotermico negro toda la radiacion es emitida por la pared

Luego:

la radiacion emitida por toda superficie negra o cuerpo es igual a el flujo en una direccion dada del contenedor isotermico a la misma temperatura.

La diferencia entre una superficie que emite y una superficie matematica en el seno del contenedor isotermico es que la densidad de energia es la mitad pues falta una direccion.

Carga en movimiento

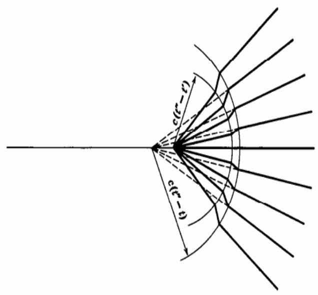
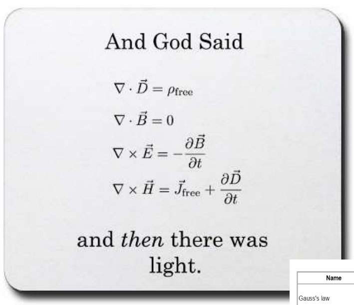


Figure 2-2. The lines of force surrounding an accelerated charge. Only some of the lines are shown.

1861



$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Formulation in terms of *total* charge and current[note 2]

Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
Maxwell–Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

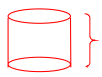
Presion y flujo de energia debido a la radiacion isotropica

Sea un fluio de radiacion electromagnetica que incide normalmente sobre una superficie

Sea ω la densidad de energia media en el flujo incidente

El momento llevado por este flujo es ω/c con c la velocidad de la luz.

Entonces al ser absorbido por la superfice tenemos que por segundo recibe toda la energia y momento contenida en un cilindro de area unidad y longitud $c \cdot 1$



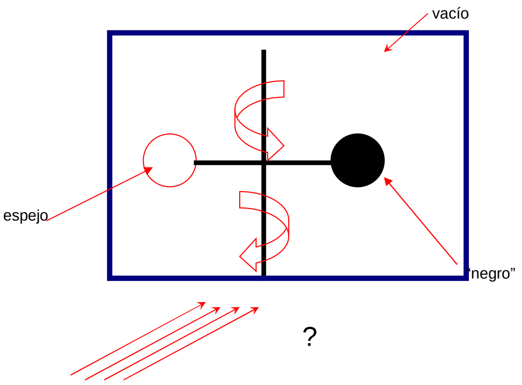
c X 1s

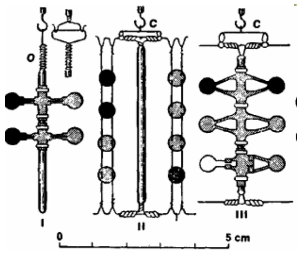
Luego lo absorbido es

momento = ω

Energia=ωc

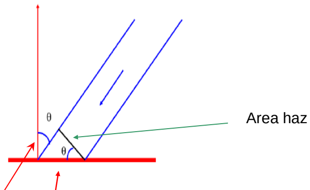
Experimento de Lebedev (1901)





Consideramos un haz de luz que incide sobre una superficie negra

Si incide con un angulo θ y al haz tiene una area elemental



Para calcular la presion necesitamos la transferencia segun la normal $\Rightarrow \approx \cos\theta$

Cae sobre un area $\Rightarrow \approx 1/\cos\theta$

Entonces

$$\boxed{p = \omega \cdot \cos^2\theta}$$

Esto es para un "haz de ondas planas" en una dada direccion.

Sean

N haces

cada uno con densidad ω

Calculamos la densidad de energia justo frente a la superficie debida a los N haces que vienen de distintas direcciones (todas las posibles)

Sea la densidad de cada uno de ellos ω

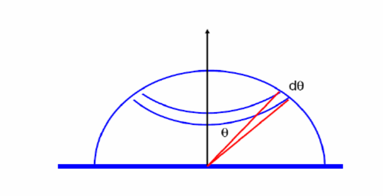
La densidad total sera

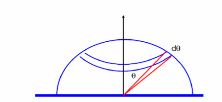
$$\boxed{\psi = N\omega}$$

La presion sera sobre la superficie

$$\boxed{p = \sum \omega\cos^2\theta = \omega\sum\cos^2\theta}$$

Donde la suma es sobre los valores de $\cos^2\theta$ de los distintos haces





Los haces viene de todas las direcciones, los que inciden según **θ** "cruzan" el anillo Subtendido por **θ** y **θ**+d**θ**

$$2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta \Rightarrow \boxed{\text{con } R = 1 \Rightarrow 2\pi\sin\theta d\theta}$$

La relacion del numero de haces por el anillo al numero total va como la relacion del area del anillo al de la semiesfera

el area del anillo es $2\pi R^2\sin\theta\, d\theta$
el area de la semiesfera es $\frac{1}{2}4\pi R^2$ con $R = 1 \Rightarrow 2\pi$

Resulta entonces

$$\boxed{\frac{dN}{N} = \frac{2\pi}{2\pi}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \boxed{dN = N\sin\theta\, d\theta}}$$

Entonces

dN

$$\boxed{p = \omega\sum\cos^2\theta = \omega N\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \omega N\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \omega N\frac{1}{3}}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \tfrac{1}{3}$$

[ψ=N ω]

Densidad de energía total

O sea que vale

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\psi}$$

Del Mismo modo la energia total que llega a la superficie es (tomando en cuenta que solo la mitad esta en el sentido de la pared)

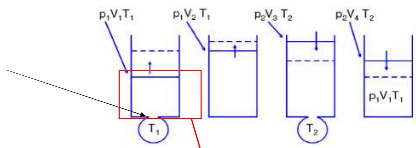
$$\boxed{E = \frac{1}{2}N\int_0^{\pi/2}c\omega\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{4}c\psi}$$

Ley de Stefan-Boltzmann

1884

¿Como depende la intensidad total de la radiación de cuerpo negro con la Temperatura?

Sea la siguiente secuencia (maquina termica, ciclo de carnot)



Condicion inicial volumen V_1 presion inicial de radiacion $p_1 = \frac{1}{3}\psi_1$

(Densidad)

1) se hace una expansion cuasiestatica hasta el volumen V_2

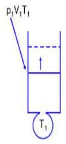
Por estar conectado con el cuerpo negro (a temperatura T_1) la densidad de energia se mantiene constante en ψ_1, tenemos una "fuente"

Para que se mantenga cte:

a) la radiacion hace trabajo sobre el piston

$$\boxed{W_r = p_1 \Delta V = \frac{1}{3}\psi_1 \Delta V}$$

b) hay que llenar el volumen con radiacion $\boxed{\psi_1 \Delta V}$



Entonces el flujo total es (que juega el rol de flujo de calor) o sea

$$\boxed{H = \frac{4}{3}\psi_1 \Delta V}$$

H es un calor

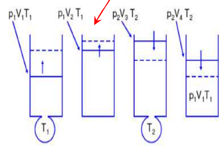
2) estando en V_2 se aisla el sistema piston y se hace una expansion cuasiestatica adiabatica

Tiene que decrecer la densidad de energia debido al trabajo realizado y al aumento de volumen$\Rightarrow$

$$\boxed{\psi_1 \to \psi_2}$$

Si todas la variaciones son pequeñas, para la presion tenemos

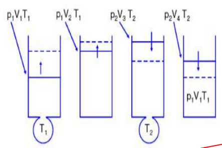
$$dp = \frac{1}{3}d\psi$$

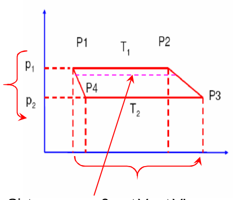


Se hacen ahora los pasos inversos

3)

4)





Asumimos que este Δp es muy pequeño

Si Δp se va a 0 $\to \Delta V \to \Delta V'$

El trabajo total sera

$$\boxed{dW = (V_2 - V_1)dp = \frac{1}{3}(V_2 - V_1)d\psi}$$

Entonces calculando la eficiencia (recordar que es un carnot o sea un ciclo)

$$\boxed{\frac{dW}{H} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{dT}{T_1}}$$

$$\boxed{\frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{4dT}{T_1}}$$

Luego

reemplazando dW y H por sus expresiones

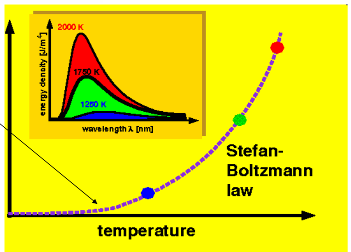
$$H = \frac{4}{3}\psi_1(V_2 - V_1)$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{4dT}{T} \Rightarrow \psi = aT^4$$

o

$$\boxed{E = \sigma T^4} \qquad \sigma=ca/4$$

Esta es la densidad total de energia emitida



Cosas a tener en cuenta

La expansión no afecta el carácter de la radiación de cuerpo negro

Ley de Wien

Sea la densidad de energia monocromatica en el rango λ y $\lambda + d\lambda$

$$\boxed{\Psi_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5} d\lambda}$$

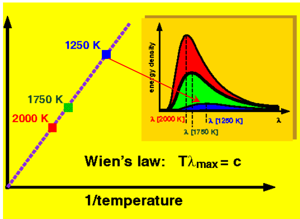
(este es el comportamiento de la densidad de energía que es la energía contenida en una unidad de volumen para λ Y λ +dλ)

Con $\boxed{f(\lambda T) = c_1 \exp(-c_2/\lambda T)}$

Esta es una ley basicamente **empirica** con dos coeficientes ajustables

Ademas

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T}$$



Rayleigh-Jeans

La idea fundamental es pensar un contendor isotermico y pensar que la radiacion en equilibrio (tambien se piensa en osciladores en la superficie) se representa por un conjunto de ondas estacionarias y a cada uno de estos osciladores se le asigna energia segun equiparticion

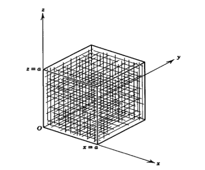
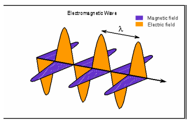


Figure 2-6. A cubical cavity containing electromagnetic radiation.

El contenedor es tal que las paredes son metalicas y paralelas entre si 2 a 2

La radiacion electromagnetica es tal que el campo electrico es perpendicular a la direccion propagacion, luego debe haber nodos en las paredes (el metal se encarga de anularel campo electrico paralelo) (el metal es infinitamente conductor)



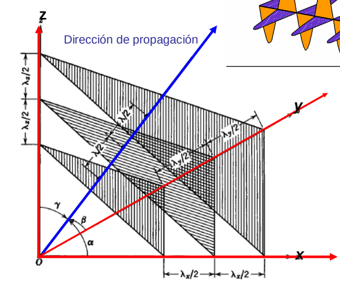


Figure 2-7. The nodal planes of a standing wave propagating in a certain direction in a cubical cavity.

Es inmediato que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_x}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\alpha} \\ \frac{\lambda_y}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\beta} \\ \frac{\lambda_z}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\gamma} \end{aligned} \right\}$$

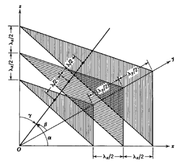


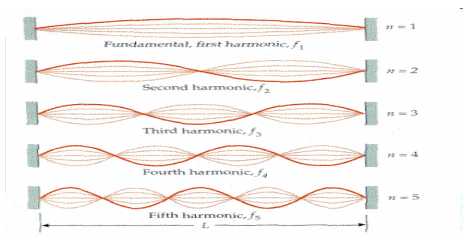
Figure 2-7. The nodal planes of a standing wave propagating in a certain direction in a cubical cavity.

Para las ondas en las 3 componentes tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} E(x,t) &= A\sin(2\pi x/\lambda_x)\sin(2\pi\nu t) \\ E(y,t) &= B\sin(2\pi y/\lambda_y)\sin(2\pi\nu t) \\ E(z,t) &= C\sin(2\pi z/\lambda_z)\sin(2\pi\nu t) \end{aligned}}$$

Con

$\sin(2\pi x)$ donde x esta dado en unidades de $2\lambda_x$



para que sean standing waves en x, y y z

Tenemos que los ceros corresponden a:

$$\boxed{\begin{aligned} 2x/\lambda_x &= n_x, & x &= a \\ 2y/\lambda_y &= n_y, & y &= a \\ 2z/\lambda_z &= n_z, & z &= a \end{aligned}}$$

Caja cuadrada

$$\boxed{\begin{aligned} & x = a = n_x \frac{\lambda_x}{2} \Rightarrow \\ & n_x = \frac{2a}{\lambda_x} \end{aligned}}$$

$$n_x = 0, 1, 2, 3, \ldots; \quad n_y = 0, 1, 2, 3, \ldots; \quad n_z = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

que con

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_x}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\alpha} \\ \frac{\lambda_y}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\beta} \\ \frac{\lambda_z}{2} &= \frac{\lambda}{2\cos\gamma} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\lambda_x}{2} = \frac{a}{n_x} \Rightarrow \frac{a}{n_x} = \frac{\lambda}{2\cos\alpha}$$

$$\boxed{\frac{2a}{\lambda}\cos\alpha = n_x, \quad \frac{2a}{\lambda}\cos\beta = n_y, \quad \frac{2a}{\lambda}\cos\gamma = n_z}$$

De donde

$$(2a/\lambda)^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Pero

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

y resulta

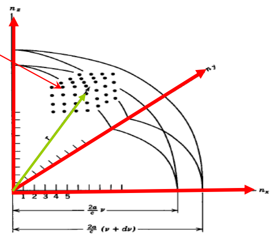
$$\boxed{2a/\lambda = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

Donde los n_i satisfacen la condicion anterior

En terminos de la frecuencia

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$$

Observar entonces que las frecuencias ν se ordenan en el espacio de los n_i como :



Calculamos el numero de puntos (y por lo tanto de valores de ν) en una "cascara "

$$N(\nu)d\nu = N(r)dr$$

con

$$r = \left[n_{x^2} + n_{y^2} + n_{z^2}\right]^{1/2}$$

O sea

$$r = \frac{2a}{c}\nu$$

y si tomamos la unidad de volumen como 1x1x1 resulta un punto por unidad de volumen y entonces (la densidad vale 1)

$$N(r)\,dr = \frac{1}{8}4\pi r^2\,dr = \frac{\pi r^2\,dr}{2}$$

Dondel el $\frac{1}{8}$ viene del hecho que solo tomamos los n_i positivos y luego tomamos en cuenta que hay dos estados de polarizacion y resulta

$$N(\nu)\,d\nu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2a}{c}\right)^3\nu^2\,d\nu$$

Multiplicando por 2

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3\nu^2 d\nu}{c^3}$$

Tomando en cuenta **equiparticion** y calculando por unidad de volumen

Con

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\,\nu^2\,kT}{c^3}d\nu$$

(como hay dos modos de vibracion en cada Frecuencia)

$$\nu = c/\lambda \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$$

y tomando en cuenta que para un cierto intervalo en ν le corresponde un cierto intervalo en λ

$$-\rho_T(\nu)d\nu = \rho_T(\lambda)d\lambda$$

[ρ≡ψ]

Entonces

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \rho_T(\nu)\frac{c}{\lambda^2}d\lambda = \frac{8\pi\,c^2\,kT}{c^3\lambda^2}\frac{c}{\lambda^2}d\lambda = \frac{8\pi\,\lambda kT}{\lambda^5}d\lambda$$

Tiene la forma de la ley de Wien pero...

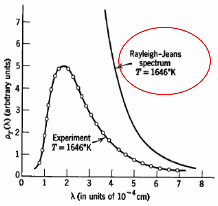


Figure 2-11. A comparison of the Rayleigh-Jeans spectrum and experiment.

Catastrofe ultravioleta!
Pero desde el punto de vista clasico el calculo es irrefutable!

Analisis de Planck de Black Body

Dado que el numero de grados de libertad esta calculado correctamente es quizas conveniente reestudiar como es la energia por grado.

Sea un oscilador

$$\boxed{\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\beta x^2}$$

La frecuencia correspondiente es

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\beta}{m}}}$$

Supongamos muchos osciladores en equilibrio a temperatura T

Desde un punto de vista **clasico** el numero de osciladores en dx y dp (de alli la energia) esta dada por la formula (observar similaridad con la distribucion de Maxwell Boltzmann en realidad el calculo seria el mismo!)

$$\boxed{dN = NC\exp\left(-\frac{\epsilon(x,p)}{kT}\right)\, dx\, dp}$$

Proba de un estado de energia ε en Un sistema a temperatura T

Nos apartamos un poquito para ver que:

UPS!

canonico

Microcanonico $\Rightarrow (N, V, E)$

$$S = k \log \Gamma(E)$$

Supongamos que lo "separamos pero en contacto" en dos subsistemas caracterizados por

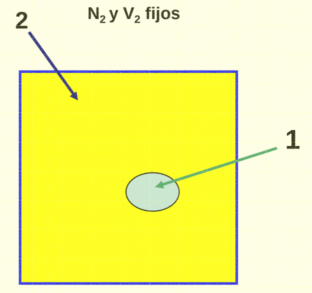
$\longrightarrow$ $H_1(p_1, q_1), H_2(p_2, q_2)$

$\longrightarrow$ $N_1, N2$

$\longrightarrow$ V_1, V_2

con

$$\boxed{N_1 << N_2}$$



$E \leq (E_1 + E_2) \leq E + 2\Delta$
$N_1 + N_2 = N$
$V_1 + V_2 = V$

Pero, que es esto?

Esto es el caso que estudiamos al analizar $S \Rightarrow \exists\ \overline{E_1}, \overline{E_2}$ que cuyos volumenes asociados en Γ "dominan"

Sea $\overline{E_1} \gg \overline{E_2}$

Lo que nos interesa es un dado estado de 1 (o sea en $dp_1\ dq_1$ alrededor de $p_1\ q_1$), y por lo tanto ***no nos interesa el estado de*** 2 *

la probabilidad de dicho estado es $\propto dp_1\ dq_1\ \Gamma_2(E - E_1) \Rightarrow$

$$\boxed{\rho(p_1, q_1) \propto \Gamma_2(E - E_1)}$$

pero el E_1 relevante es $\overline{E_1}$ y los otros posibles valores son irrelevantes

- **Es decir el estado exacto de 2 sino todos lo compatibles con la condicion**
- **macroscopica**

$E_1 << E_2$

$$k \log \Gamma_2(E - E_1) = S_2(E - E_1) \simeq S_2(E) - E_1 \left[\frac{\partial S_2(E_2)}{\partial E_2} \right]_{E_2 = E} + \ldots$$

$$= S_2(E) - E_1/T$$

Donde T es la temperatura del sistema 2 (el grande)

Entonces es inmediato que

$$\boxed{\Gamma_2(E - E_1) \simeq \exp\left[\frac{S_2(E)}{k} \right] \exp\left[-\frac{E_1}{kT} \right]}$$

Solo de E!

por lo tanto

$$\boxed{\rho(p, q) = e^{-\beta H(p,q)}}$$

con $\beta = \frac{1}{kT}$

El volumen ocupado es

$$Q_N(V,T) = \int \frac{d^{3N}p\,d^{3N}q}{N!h^{3N}} e^{-\beta H(p,q)}$$

Entonces, queda

$$\rho(q,\, p) \propto \exp\{-\beta H(q,\, p)\};$$

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(q,\, p) \exp(-\beta H)\, d\omega}{\int \exp(-\beta H)\, d\omega},$$

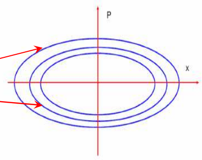
Volvemos a nuestro análisis

$$dN = NC \exp\left(-\frac{\epsilon(x,p)}{kT}\right) dx\, dp$$

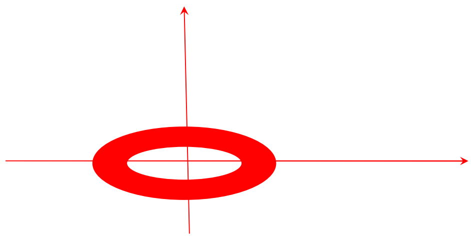
Con la condicion de contorno que $\int dN = N$ (numero total de osciladores)

Consideremos las curvas de energia constante, (son obviamente elipses)

Consideremos dos elipses a ϵ y $\epsilon + \Delta\epsilon$.



Sea entonces el área asociada



Sea $\Delta\epsilon$ muy pequeño, consideremos que en ese intervalo $\exp\left(-\frac{\epsilon(x,p)}{kT}\right)$ puede ser tomado como constante.

Entonces el numero de osciladores en este rango de ~~temperaturas~~ es

$$\boxed{\Delta N = NC\exp\left(-\frac{\epsilon(x,p)}{kT}\right)\iint dx\,dp}$$

El area de la elipse es

$$\boxed{S = \pi p_m x_m}$$

con el subindice m denotando el maximo

Los maximos se calculan trivialmente

$$\boxed{x_m = \sqrt{2\epsilon/\beta} \qquad p_m = \sqrt{2m\epsilon}}$$

entonces

$$\boxed{S = 2\pi\epsilon\sqrt{m/\beta} = \epsilon/\nu}$$

Para la elipse

Entonces el area asociada a

$$\boxed{\Delta S = \Delta\epsilon/\nu}$$

Entre dos elipses muy cercanas

Entonces

$$\boxed{\Delta N = NC'\exp\left(-\frac{\epsilon(x,p)}{kT}\right)\Delta\epsilon}$$

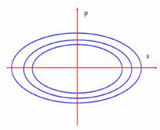
Con $C' = C/\nu$

Si quiero calcular la energia media de los osciladores habria que integrar sobre los valores de x y p y dividir por N

Hacemos el calculo usando la discretizacion en (x,p), es decir, haremos la suma sobre las poblaciones de cada uno de los anillos

Tomamos anillos de area h

El area total bajo el anillo τ será $S = \tau h$



Tomando en cuenta que hemos visto que $S = 2\pi\epsilon\sqrt{m/\beta} = \epsilon/\nu$ entonces un oscilador sobre la elipse interior al anillo τ sera tal que su energia vale

$$\boxed{\epsilon = S\nu = \tau h\nu}$$

El numero de osciladores en ese anillo (entre ϵ y $\epsilon + \Delta\epsilon$) que llamamos N_τ

$$\boxed{N_\tau = [NC'\Delta\epsilon]\exp\left(-\frac{\tau h\nu}{kT}\right) = N_0\exp\left(-\frac{\tau h\nu}{kT}\right)}$$

Que da la secuencia

$$\boxed{\begin{array}{l} N_0\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \\ N_0\exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) \\ etc. \end{array}}$$

La Energia total es ahora la suma sobre los anillos (el numero en cada anillo por la energia "tipica de la celda")

$$E \approx \sum_{0}^{\infty} \tau h\nu N_\tau = N_0 h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\left[1 + 2\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + 3\exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots\right]$$

Como $1 + 2x + 3x^2 + \dots = (1-x)^{-2}$

$$E \approx N_0 h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]^{-2}$$

Del mismo modo el numero total de osciladores es:

$$N = \sum N_\tau = N_0\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots\right)$$
$$= N_0\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)^{-1}$$

Si ahora calculamos la energia media como E/N

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{E}{N} = \frac{N_0 h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]^{-2}}{N_0\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)^{-1}}$$
$$= \frac{h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]^{2}}$$
$$= \frac{h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]\left[1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]}$$
$$= \frac{h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]} = \boxed{\frac{h\nu}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}}$$

Si ***hiciéramos*** **el limite** $h \to 0$ entonces usando que $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \dots$. hacemos $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$ entonces

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT}} = kT$$

O sea que en el limite de $h \to 0$ caemos en equiparticion pero esto lleva a la formula incorrecta.

Hipotesis de Plank

Plank propone dejar h finito o sea que cada anillo involucra un cierto valor de la energia o sea un espectro discreto de energias

Los posibles valores de los osciladores serian $0,\ h\nu,\ 2h\nu$, etc.

ENERGIAS DISCRETAS!!!!!!!!!

Luego de algunos devaneos propuso que habia un valor caracterisitco relacionado con la frecuencia $\epsilon_0 = h\nu$

Las ENERGIAS de los osciladores cambian discontinuamente!!!!!!!!

Esta suposicion era completamente impensada y no tenia ninguna relacion con la ideas de esos tiempos 1900'

Ley de radiacion de Plank

1901

Tomo la relacion del numero de nodos en una cavidad obtenida por Rayleigh y Jeans

$$\boxed{dn = 8\pi\frac{d\lambda}{\lambda^4}}$$

que da el numero de grados de libertad por unidad de volumen con longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$

<E>

Entonces la densidad de energia es

$$\boxed{\psi_\lambda d\lambda = 8\pi\frac{d\lambda}{\lambda^4}\frac{h\nu}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}}$$

con $\nu = c/\lambda$ obtenemos

$$\boxed{\psi_\lambda = 8\pi hc\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}}$$

Si λT es suficientemente pequeño se puede tirar el -1 del denominador y queda

$$\boxed{\psi_\lambda = 8\pi hc\frac{1}{\lambda^5}\exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)}$$

Que es la **ley de Wien**

h=6.625 x 10^{-27} erg sec

$$\psi_\lambda = 8\pi hc\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}$$

Si por el contrario λT es muy grande

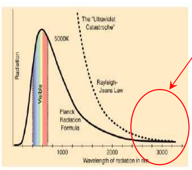
$\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT} + \left[\frac{hc}{\lambda kT}\right]^2 + \ldots$ y queda

Del orden de 1

$$\boxed{\psi_\lambda \approx 8\pi hc\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\frac{hc}{\lambda kT}} = 8\pi kT\frac{1}{\lambda^4}}$$

Observar que λT muy grande corresponde a h muy pequeño!!!!!

Que es la ley de **Rayleigh Jeans**



Sea un sistema de osciladores armonicos quasi independientes... **(*)**

Para cada oscilador

$$H_i(q_i,p_i) = \frac{1}{2}m\omega^2 q_i^2 + \frac{1}{2m}p_i^2$$

$$Q_N = \frac{1}{h^N}\int\ldots\int dq_1 dp_1 \ldots dq_N dp_N \exp\{-\beta\sum H_i\} =$$
$$= \frac{1}{h}\int dq_1 dp_1 \exp\{-\beta H_1\}\frac{1}{h}\int dq_2 dp_2 \exp\{-\beta H_2\}\ldots$$
$$= Q_1^N = \left\{\frac{1}{h}\left(\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\right\}^N = \left(\frac{2\pi}{h\beta\omega}\right)^N$$

De donde la termodinamica

(*) para que llegue al equilibrio

$$A = -kT\log Q_N = NkT\log(\frac{h\beta\omega}{2\pi})$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial T}\right]_V = -S = Nk\log(\frac{h\beta\omega}{2\pi}) + Nk$$

$$\boxed{U = A + TS = NkT}$$

la equiparticion!

Podriamos tomar que $\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar$ (oscilador de Schroedinger) o $\varepsilon_n = n \,\square$ (osc. de Plank)

entonces $Q_N(\beta) = \left(e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{1}{2}n\beta\hbar\omega}\right)^N = \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right]^N$

de donde

$$A = N\left[\frac{\hbar\omega}{2} + kT\ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]$$

$$U = N\left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right]$$

Para osc. Schroedinger

$T \to \infty \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \approx (\frac{1}{\beta\hbar\omega} - \frac{1}{2})\hbar\omega \Rightarrow U \to NkT$

$(\frac{1}{\exp(x)-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{720}x^3 + O(x^4)\ )$

$T \to 0 \Rightarrow U \to N\left[\frac{\hbar\omega}{2}\right]$

Para osc. Plank (restamos lo que agregamos en Schroedinger)

$T \to \infty \Rightarrow U \to NkT - \frac{\hbar\omega}{2}N$

$T \to 0 \Rightarrow U \to 0$

y=<U>/(Nħω)
x=kT/ħω