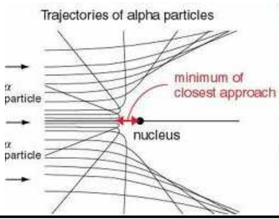
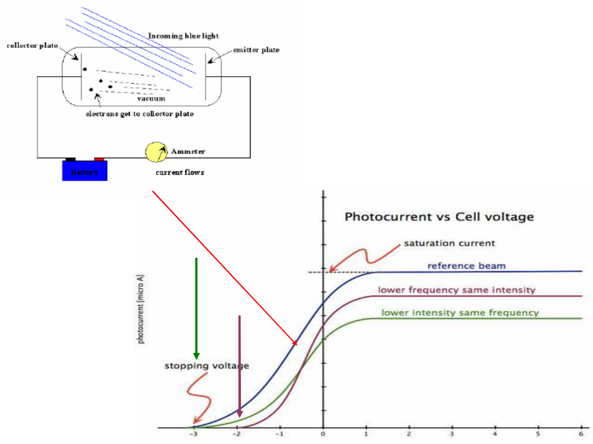
Q_2_b

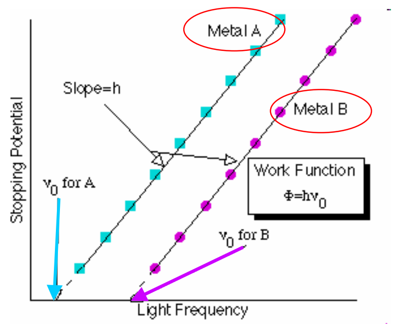


Trajectories of alpha particles
minimum of closest approach
α particle
nucleus
α particle

Repaso



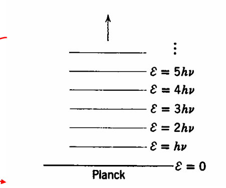
Incoming blue light
collector plate
emitter plate
vacuum
electrons get to collector plate
Ammeter
current flows
Photocurrent vs Cell voltage
saturation current
reference beam
lower frequency same intensity
lower intensity same frequency
stopping voltage
photocurrent [micro A]
photocell voltage [V]



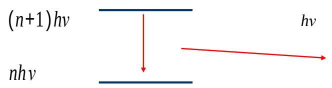
Metal A
Metal B
Slope=h
Work Function
Φ=hν0
ν0 for A
ν0 for B
Stopping Potential
Light Frequency

Teoría Quántica del efecto fotoeléctrico

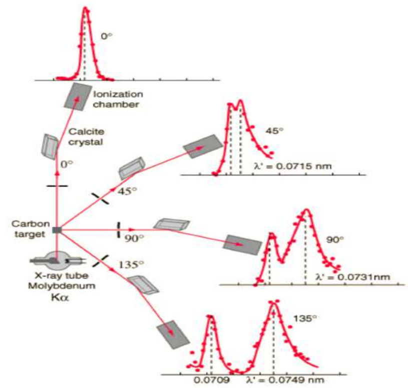
De acuerdo a Plank



Einstein propone



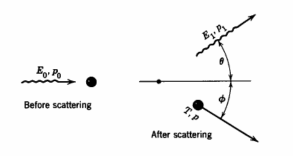
Compton



Como la frecuencia es muy alta (mucho mayor que la usada para el efecto fotoelectrico) es adecuado considerar al electron como estacionario

(p es muy grande)

Sea el siguiente esquema de la colision



!

Conservación de momento

Segun x

$$p_0 = p_1 \cos\theta + p\cos\phi \Rightarrow$$
$$p_0 - p_1\cos\theta = p\cos\phi$$

Segun y

$$0 = p_1\sin\theta + p\sin(360^\circ - \phi) = p_1\sin\theta - p\sin(\phi) \Rightarrow$$
$$p_1\sin\theta = p\sin(\phi)$$

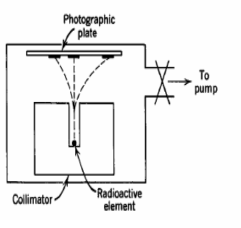
Conservación de Energía

$$E_0 + m_0c^2 = E_1 + m_0c^2 + T$$
$$E_0 = E_1 + T$$

Resulta

$$\boxed{\lambda_1 - \lambda_0 = (1-\cos\theta)\frac{h}{m_0c} = \lambda_c(1-\cos\theta)}$$

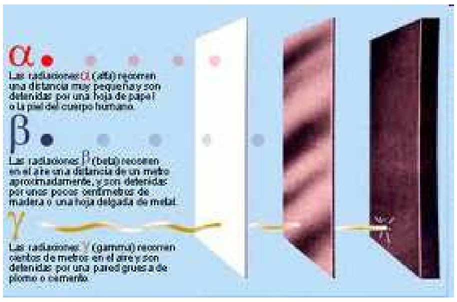
El Nucleo Atomico



Experimentos llevados adelante por M Curie y Bequerel encontraron que las substancias radioactivas emitian 3 tipos de radiacion

1896

α β γ



Relaciones de las masas

masa electron en reposo → $9.11 \times 10^{-28} gr$

masa proton en reposo → $1.673 \times 10^{-24} gr$ (1919)

masa neutron en reposo → $1.675 \times 10^{-24} gr$ (1932)

$$\frac{1.673 \times 10^{-24}}{9.11 \times 10^{-28}} = 1836.4$$

Rutherford mostró que las partículas α eran nucleos de Helio

Razonamiento basico

El atomo es neutro

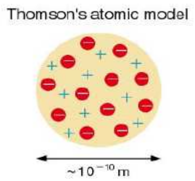
Los electrones salen del atomo

Debe haber cargas positivas en algun lado

Modelo de Thompson del atomo

Thompson propuso el siguiente modelo del Atomo

Particulas negativas en un medio positivo

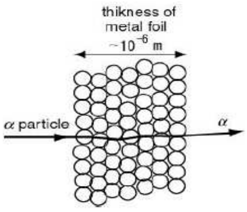


Cuando se excita al atomo los electrones deberian vibrar alrededor de las posiciones de equilibrio.

Analisis de rutherford

Rutherford llevo adelante experimentos de colisiones entre núcleos y particulas α y encontro los siguiente

Primero estudio que pasaria para el problema del scattering segun el modelo de Thompson

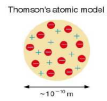


Hay dos tipos de procesos que contribuyen a la deflección de la particula α

a) la carga positiva del nucleo

b) las colisiones con los electrones

Choque



conservacion
$$\begin{cases} MV = MV' + mv \\ MV^2 = MV'^2 + mv^2 \end{cases}$$

Colisiones de las α con los electrones, queremos saber la maxima transferencia de momento en una colisión

luego con (resolviendo de la forma usual)

Conservación de momento
$$\begin{cases} MV - mv = MV' \Rightarrow V - \frac{m}{M}v = V' \Rightarrow \\ \left(V - \frac{m}{M}v\right)^2 = V'^2 = V^2 + \frac{1}{M^2}m^2v^2 - \frac{2}{M}Vmv \Rightarrow \end{cases}$$

Conservación de Energía
$$\begin{cases} \left(\cancel{V^2} + \frac{1}{M^2}m^2v^2 - \frac{2}{M}Vmv\right)M + mv^2 = \cancel{MV^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{M}m^2v^2 - 2Vmv + mv^2 = 0 \approx -2Vmv + mv^2 \boxed{\Rightarrow v = 2V} \end{cases}$$

La maxima velocidad final del electro es 2 veces la de la particual que la choca

Procesos en el nucleo

Para los electrones la fuerza de interaccion es

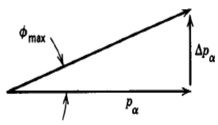
Diferencial de carga

$$dF = \frac{2e\,dq}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Pero el electro lo consideramos ≈ libre dada la masa de la particula α

Entonces como sabemos el limite maximo del momento transferido al electron podemos estimar la defleccion usando

Para la carga positiva



Con

Según vimos
$$\begin{cases} \Delta p_a = 2mV \\ p_a = MV \end{cases}$$

Entonces
$$\boxed{\frac{\Delta p_a}{p_a} = \frac{2m}{M} = \frac{2}{1836} \approx 10^{-4}(radianes) \approx \phi_{\max}}$$

$\phi_{\max}$ Para la interacción con los “electrones”

Para la interaccion con la carga positiva

Sea R el radio del nucleo

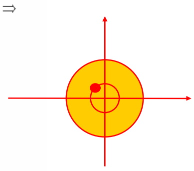
En vez de hacer la cuenta exacta la estimamos

Ze

$$F = \int \frac{2edq}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \approx 2e\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \int dq = 2eq\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \Rightarrow$$

$$F_{\max} \approx 2Ze^2 \frac{1}{R^2}$$

Radio del atomo



De donde

[$\Delta t = R/V$]

$$\Delta p_a = F\Delta t \approx 2Ze^2 \frac{1}{RV} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta p_a}{p_a} = \frac{2Ze^2}{MRV^2}}$$

$e \simeq 5 \times 10^{-10}$ esu
$M \simeq 8 \times 10^{-24}$ gm
$v \simeq 2 \times 10^{-9}$ cm/sec
$R \simeq 10^{-8}$ cm

Resulta entonces

$$\boxed{\phi_{\max} \approx 10^{-4} radianes}$$

O sea que nuevamente tenemos lo mismo
Pero esto es para una colisión

Pero tenemos muchos nucleos y por lo tanto muchas colisiones pero estas son escencialmente al azar y por lo tanto pensamos en un random walk

$$\begin{aligned} R^2 &= (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots)^2 + (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots)^2 \\ &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \ldots + \\ &\quad 2\Delta x_1 \Delta x_2 + 2\Delta x_1 \Delta x_3 + \ldots \end{aligned}$$

Observar que la segunda linea es

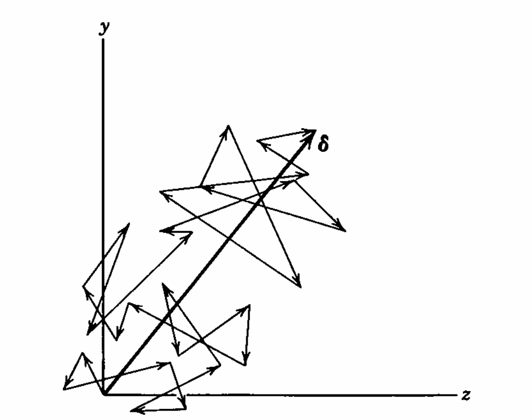
$$\Delta x_1(\Delta x_2 + \Delta x_3 + ..) + \Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_3 + \ldots$$

Que con $N \to \infty$ se va a 0

Luego

$$\boxed{\begin{aligned} R^2 &\approx \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \ldots + \\ &= N\langle r^2 \rangle \end{aligned}}$$

Esto es una especie de random walk, por lo tanto razonando como los hicimos en su momento



$$\boxed{N(\delta)d\delta = \frac{2N\delta}{\langle\delta\rangle^2}\exp\left(\frac{-\delta^2}{\langle\delta^2\rangle}\right)d\delta}$$

Donde δ denota a los vectores que se estan sumando

$$\boxed{\begin{aligned} P_N(x) &= \left[\frac{1}{2\pi\left(\frac{N^2 l^2}{N}\right)}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\pi\left(\frac{N^2 l^2}{N}\right)}\right] \\ ¿&\left[\frac{1}{2\pi\langle L^2\rangle}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\pi\langle L^2\rangle}\right] \end{aligned}}$$

En terminos de los angulos

$$N(\Phi)d\Phi = \frac{2N\Phi}{\langle\Phi\rangle^2}\exp\left(\frac{-\Phi^2}{\langle\Phi^2\rangle}\right)d\Phi$$

Con

$$\langle\Phi^2\rangle^{1/2} = \sqrt{N} \cdot \langle\phi j^2\rangle^{1/2}$$

Recordemos que :

Binomial

$$\boxed{P_N(n) = \frac{N!}{n!m!}p^n q^m}$$

Normal

$$\boxed{P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt[3]{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n-\langle n\rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]}$$

En terminos del desplazamiento (numero de pasos)

$$\boxed{P_N(m) = \left[\frac{2}{\pi N}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{m^2}{2N}\right]}$$

En terminos del desplazamiento (espacial)

$$\boxed{P_N(x) = \left[\frac{1}{2\pi N l^2}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{2N}\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]}$$

Jugando

$$P_N(x)=\left[\frac{1}{2\pi\left(\frac{N^2 l^2}{N}\right)}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\pi\left(\frac{N^2 l^2}{N}\right)}\right]$$

$$¿\left[\frac{1}{2\pi\langle L^2\rangle}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\pi\langle L^2\rangle}\right]$$

La cuestion es que se encontro que habia unas pocas particulas α que eran dispersadas a grandes angulos

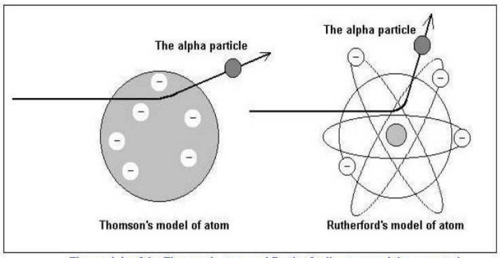
Para grandes (>90) se encuentra

$$\frac{N(\Phi>90^\circ)}{N}=\frac{\int_{90}^{180}N(\Phi)d\Phi}{N}\approx\exp[-(90^2)]\approx 10^{-3500}$$

Pero el resultado experimental fue $\approx 10^{-4}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Modelo de rutherford

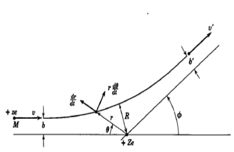
Entonces propuso el "modelo planetario"

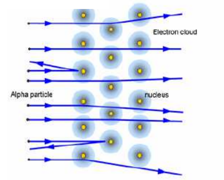


The models of the Thomson's atom and Rurtherford's atom; and the expected aberrations of alpha particle in both cases.

Supone entonces que la dispercion se hae por cargas positivas estacionarias

La colision es asi:





- Potencial central
- La fuerza es siempre radial
- Se conserva el momento angular

$$Mr^2\frac{d\theta}{dt}=L=cte.$$

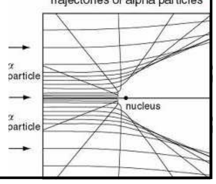
Estudiamos el efecto de la colision entre una particula α y un nucleo

Las condiciones generales deben ser tales que:

a) se debe conservar la energia

b) se debe conservar el momento

c) simetria (potencial simetrico) i.e trayectorias simetricas respecto del punto de minima cercania (dado el potencial en consideracion hasta el punto de retorno solo puede acercase (no hay cola atractiva))



La pregunta siguiente seria

dado un flujo homogeneo de particulas las contenidas en un "cilindro hueco" a donde seran dispersadas

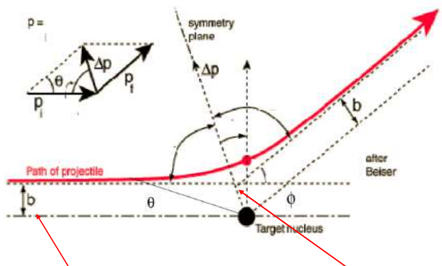
Cuando lal particula incide sobre el nucleo aislado resulta que incide con un parametro de impacto **b**

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2$$

$$m v_0 \ \mathbf{b}$$

O sea energia solo cinetica y un cierto momento angular

Definamos el problema en termino de la distancia al nucleo r y el angulo θ



Parametro de impacto

Distancia minima

Fuerza central

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = F_r(r)\hat{r}}$$

$$\begin{aligned}\underline{F}(\underline{r}) &= -\underline{\nabla} V(r) = -\frac{\partial V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial z}\hat{z} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dV(r)}{dr}\hat{x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dV(r)}{dr}\hat{y} - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dV(r)}{dr}\hat{z} \\ &= -\hat{r}\frac{dV(r)}{dr}\end{aligned}$$

$$\boxed{V(r) = \int_r^\infty F_r(\tilde{r})d\tilde{r} = \int_r^\infty \underline{F}(\tilde{r})\cdot \underline{d\tilde{r}}}$$

Momento angular

$$\boxed{\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p} = m\underline{r} \times \dot{\underline{r}}\,.}$$

torque

$$\frac{d}{dt}\underline{L} = \dot{\underline{L}} = m\underbrace{\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}}}_{\equiv 0} + m\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = m\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = \underline{r} \times \underline{F} \equiv \underline{\tau}.$$

Para el potencial central

$$\boxed{\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times F_r(r)\hat{r} = 0\,,}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{L} = 0\,,}$$

$$\mathbf{r} = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\,(\cos\varphi, \sin\varphi) + r\,\dot{\varphi}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi)$$
$$\mathbf{a} = \ddot{r}\,(\cos\varphi, \sin\varphi) + 2\,\dot{r}\dot{\varphi}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi) + r\,\ddot{\varphi}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi) - r\,\dot{\varphi}^2\,(\cos\varphi, \sin$$

con

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad \#$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \qquad \#$$

queda

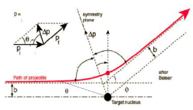
$$a = a_r\,\hat{\mathbf{r}} + a_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2$$
$$a_\varphi = 2\,\dot{r}\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}$$

Pero en un potencial central se conserva el momento angular por simetria entonces

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\,\dot{\varphi}\right) = r\left(2\,\dot{r}\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\right) = r a_\varphi = 0$$
$$a_\varphi = 0$$

La particula tiene componentes de la velocidad

$$\frac{dr}{dt}$$
$$r\frac{d\theta}{dt}$$



y momento angular respecto de el centro dispersor

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

Tenemos ademas la energia potencial debida a coulomb

$$\frac{2Ze^2}{r}$$

2e carga de la α

Entonces la energia

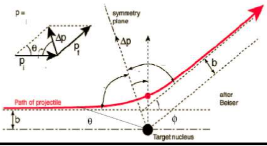
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \frac{2Ze^2}{r}$$

y el momento angular

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = mv_0 b \qquad [1]$$

Entonces

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = mv_0 b$$



Del momento angular $\; r^2\frac{d\theta}{dt} = v_0 b \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 b}{r^2} \Rightarrow$ Reemplazamos en el termino De energía cinética

$$v_0^2 = \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v_0 b}{r}\right)^2\right] + \frac{2Ze^2}{\frac{1}{2}mr} \Rightarrow$$

despejamos

$$\frac{dr}{dt} = \left[v_0^2 - \frac{2Ze^2}{\frac{1}{2}mr} - \left(\frac{v_0 b}{r}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= v_0\left[1 - \frac{2Ze^2}{\frac{1}{2}mrv_0^2} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$= v_0\left[1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} \qquad [2]$$

Tomando en cuenta que: $\frac{d\theta/dt}{dr/dt} = \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow$

Dividiendo adecuadamente [1]/ [2]

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{v_0 b}{r^2}}{v_0\left[1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-1/2}$$

La integral de esta ecuacion es

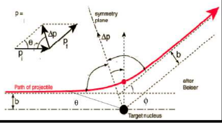
$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{b}{\sqrt{b^2+Q^2}}\left(1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right)^{1/2}\right] - \cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{b^2+Q^2}}$$

Cual es el punto de maxima acercamiento?

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \left[1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{b^2+Q^2}}$$

Angulo de maxima cercania θ_0



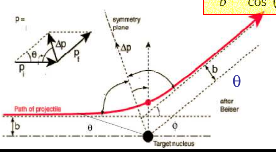
UsanUsando la simetria de la trayectoria $\Rightarrow \theta = 2\theta_0 \Rightarrow$ la delfexion final ϕ es

$$\boxed{\phi = \pi - 2\theta_0 = 2\cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{b^2+Q^2}}} \Rightarrow \qquad \#$$

$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{b}{\sqrt{b^2+Q^2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{b^2}{b^2+Q^2} = \frac{1}{1+Q^2/b^2} \Rightarrow Q^2/b^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

$$\frac{Q^2}{b^2} = \frac{1-\cos^2(\Phi/2)}{\cos^2(\Phi/2)} = \frac{1}{\cot^2(\Phi/2)}$$

$$\boxed{b = Q\cot\frac{\phi}{2}}$$



SEa el Flujo homogeneo

El numero de particulas que inciden en db con una densidad de incidencia N_0 es

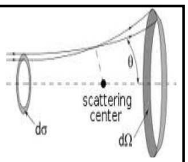
$$\boxed{dN = 2\pi N_0\, b\, db}$$

Estas seran desviadas segun

$$\boxed{db = \frac{Q}{2}\frac{d\phi}{\sin^2(\phi/2)}}$$

Usando el angulo solido

$$d\omega = 2\pi\ \sin\phi\ d\phi = 4\pi\ \sin(\phi/2)\ \cos(\phi/2)d\phi$$



El numero N_1 uq cae por unidad de area en una pantalla que esta a distancia R es

$$N_1 = \frac{dN}{R^2dw} = \frac{2\pi N_0\, b\, db}{R^2dw} = \frac{e^4N_0}{m^2v_0^4}\frac{Z^2}{R^2}\frac{1}{\sin^4(\phi/2)}$$

área

Además dependerá del espesor del blanco t

$$Mr^2\frac{d\theta}{dt} = L = cte.$$

Luego Mvb es constante con v la velocidad inicial y b el parametro de impacto

La energia total antes y despues de entrar en el rango de interaccion es cinetica y sis pensamos en un centro fijo

$$\frac{1}{2}Mv^2 = cte.$$

La energia en coordenadas polares planas es

$$E = T + V = \frac{1}{2}M(r'^2 + r^2\theta'^2) + V(r) = H \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\dot{p}_r = \dfrac{\partial H}{\partial r} \\ \dot{p}_r = m\,\ddot{r} \end{cases}$$

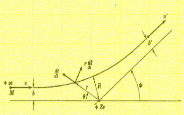
$$\boxed{-M\frac{dr^2}{dt^2} = r\theta'^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) \Rightarrow}$$

Para la componente radial del movimiento

$$\frac{zZe^2}{r^2} = M\left[\frac{dr^2}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

El metodo usual es escribir

$$u = 1/r$$



Lagrangiano $$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Ecuacion de Newton $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{r} = m\,2\,r\,\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}U \Rightarrow$$

Parte Radial $$\boxed{m\frac{d^2r}{dt^2} - m\,2\,r\,\dot{\theta}^2 = \frac{zZe^2}{r^2}}$$

y luego de algunos pasos se llega a

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{M^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\frac{zZe^2}{r^2} = M\left[\frac{dr^2}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$u = 1/r$$

Se obtiene

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{zZe^2M}{L^2} = -\frac{zZe^2M}{(Mvb)^2}}$$

Sea

$$D = \frac{zZe^2}{(1/2)Mv^2}$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{D}{2b^2}}$$

La solucion general de esta ecuacion es

$$\boxed{u = A\cos(\theta) + B\sin(\theta) - \frac{D}{2b^2}}$$

Las solucion particular con $\begin{cases} \theta \to 0 \text{ con } r \to \infty \\ \dfrac{dr}{dt} \to -v \text{ con } r \to \infty \end{cases}$

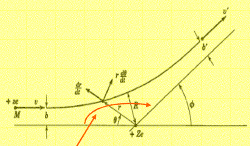
Velocidad inicial

O tambien $$\begin{cases} u = \dfrac{D}{2b^2}\cos\theta + \dfrac{1}{b}\sin\theta - \dfrac{D}{2b^2} \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{b}\sin\theta + \dfrac{D}{2b^2}(\cos\theta - 1) \end{cases}$$

Para obtener informacion hacemos:

Con r=∞ tenemos que

$$0 = \frac{1}{b}\sin\theta + \frac{D}{2b^2}(\cos\theta - 1)$$



Y la solución es θ=0 y corresponde a la particula incidente

Hay otra solución que es:

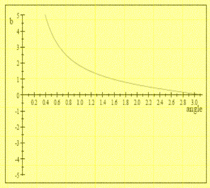
$$\frac{2b}{D} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

Correspondiente a r grande después de la colisión

$$\tan\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) = \frac{2b}{D} = \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\cot\frac{\phi}{2} = \frac{2b}{D}$$

$\cot\frac{\phi}{2}$



O sea que un dado parametro de impacto determina el angulo de desviacion

Si incide entre b y b+db es dispersada entre φ y φ+dφ

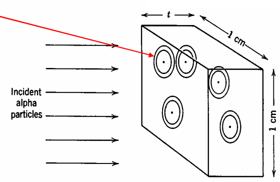
Sea un proceso en el que un flujo uniforme incide sobre un "foil" de espesor t

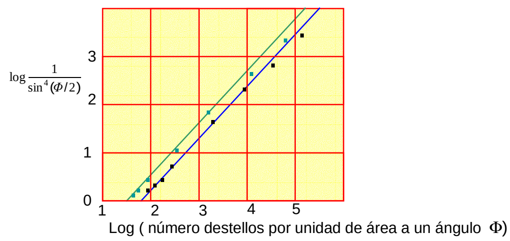
En un tal foil habra por unidad de area ρt centros dispersores

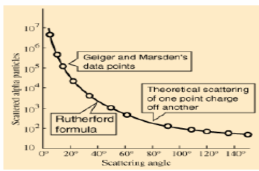
Entonces tenemos que la proba de deflectarse en ϕ depende de la proba de tener un parametro de impacto b

Luego $P(b)\,db$

$$P(b)db = (\rho t)2\pi b\, db$$







Tamaño del nucleo

$\left[\text{radio atomo} \approx 10^{-12} m\right]$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \left[1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{2Q}{r} - \frac{b^2}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2rQ - b^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{r = 2Q = \frac{4Ze^2}{mv_0^2}}$$

Para una particula α

m (masa) = 6.7×10−27 kg
q1 = 2×(1.6×10−19) C
q2 (oro) = 79×(1.6×10−19) C
v (velocidad inicial) = 2×107 m/s

$$\boxed{r \approx 10^{-14} m}$$

$fm = 10^{-15} m$

$R \approx r_0 A^{1/3}$

$r_0 \approx 1.3 fm$

$R_{oro} \approx 1.3(197)^{1/3} \approx 7.5 fm$