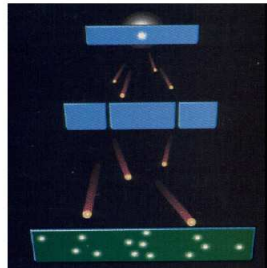


**De Broglie
(nuevamente)**



De Broglie "a la" De Broglie

1924 "A tentative Theory of Light Quanta"

Resultado central de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Empezo suponiendo que el foton tenia masa en reposo. (extremadamente pequena $\approx 10^{-44}gr$)

Si tiene masa en reposo tendra una frecuencia caracteristica en el sistema en el que el foton esta en reposo

$$h\nu_0 = m_0c^2$$

Entonces

$$\phi_0 \sim \sin(2\pi\nu_0 t_0)$$

Si paso a un sistema de laboratorio tenemos que

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{v'x}{c^2} \right)$$

Con $\beta = \frac{v'}{c}$

de este modo la onda queda

$$\phi(x,t) \sim \sin \left(2\pi\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{v'x}{c^2} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\phi(x,t) \sim \sin \left[2\pi\nu' \left(t - \frac{v'x}{c^2} \right) \right]$$

$$\phi(x,t) \approx \sin \left[2\pi\nu' \left(t - \frac{x}{\bar{\omega}} \right) \right] \Rightarrow k = \frac{1}{\bar{\omega}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{con } \bar{\omega} = \frac{c^2}{v'}$$

Con

$$v = v_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

donde

$$h\nu = h\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 = mc^2 = E$$

y la velocidad de fase resulta ser

$$\omega = \frac{c^2}{v'}$$

La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{\omega}{\nu} = \frac{c^2}{v'v_0/\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c^2}{v'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v_0}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\nu} = \frac{c^2}{v'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v_0} \frac{h}{h} = \frac{c^2}{v'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2} h = \frac{h}{mv'} = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Pero con la masa en reposo distinta de 0

CONSTRUCCION de PAQUETES

Si queremos localizar aproximadamente la partícula necesitamos algo del tipo



Figure 4-2. A group of plane waves.

Sea la onda monocromática plana

$$\Psi(x, t) = \sin 2\pi(\nu t - vt) = \sin 2\pi(kx - vt)$$

Que es senoidal para x fijo o t fijo y que tiene nodos en los 0 del seno que son cuando $2\pi(kx - vt) = n\pi$ o sea para $x_k = \frac{n}{2k} + \frac{v}{k}t$ entonces si calculamos

$$v' = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{v'}{k} = v\lambda$$

Pero que ocurre si sumamos dos de estas?

$$\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = \sin 2\pi(kx - vt) + \sin 2\pi((k + \delta k)x - (v + \delta v)t)$$

Como

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sin(2A) + \frac{1}{2} \sin(2B) = \\
& = \cos B \sin B + \sin A \cos A \\
& = \cos^2 A \cos B \sin B + \sin^2 A \cos B \sin B + \cos^2 B \sin A \cos A + \sin^2 B \cos A \sin A \\
& = \\
& = \cos^2 A \cos B \sin B + \cos A \cos^2 B \sin A + \cos A \sin A \sin^2 B + \cos B \sin^2 A \sin B = \\
& = (\cos A \cos B + \sin A \sin B)(\sin A \cos B + \sin B \cos A) \\
& = \cos(A - B) \sin(A + B) =
\end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A - B) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(A + B) \right]$$

Haciendo

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi(kx - vt) & \# \\
B &= 2\pi((k + dk)x - (v + dv)t) & \#
\end{aligned}$$

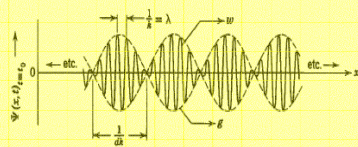
Queda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(A - B) &= \pi(kx - vt) - \pi((k + dk)x - (v + dv)t) = -\pi(xdk - tdv) \\
\frac{1}{2}(A + B) &= \pi(kx - vt) + \pi((k + dk)x - (v + dv)t) = \pi(xdk - 2tv - tdv + 2kx)
\end{aligned}$$

Como $dk \ll k$ y $dv \ll v$ se desprecian en la segunda y obtenemos

$$\Psi(x, t) = 2 \cos 2\pi \left(x \frac{dk}{2} - t \frac{dv}{2} \right) \sin 2\pi(kx - vt)$$

cuya grafica es



Aparece entonces la onda original modulada por una de frecuencia menor

para la original valen los resultados ya obtenidos

$$v' = v/k$$

Esto es la velocidad de fase

y para la otra

$$g = \frac{dv}{dk}$$

Esto es la velocidad de grupo

Calculo de las velocidades

Sabemos que

$$v = \frac{E}{h}$$
$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}$$

$$dv = \frac{dE}{h}$$
$$dk = \frac{dp}{h}$$

Entonces

$$g = \frac{dE}{dp}$$

Pero sabemos que

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

de donde como

$$2E dE = c^2 2p dp \Rightarrow$$

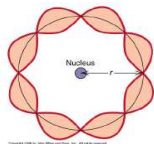
$$g = c^2 \frac{p}{E} = c^2 \frac{mv'}{mc^2} = v'$$

Estos resultados para la suma de 2 se extienden para la suma de infinitos y se obtiene lo mismo

La regla de cuantificacion de Bohr

De broglie mostraba en su tesis que una verificacion de su modelo era que podia explicar las orbitas de Bohr

Efectivamente si se considera que en las orbitas las ondas asociadas a los electrones deben ser ondas estacionarias \Rightarrow



Imponiendo la onda estacionaria

$$2\pi r = n\lambda \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

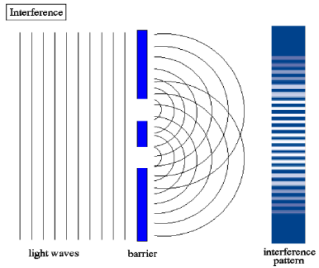
$$\frac{hr}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi} \text{ pero } p = h/\lambda \Rightarrow$$

$$\frac{nh}{2\pi} = pr = mvr$$

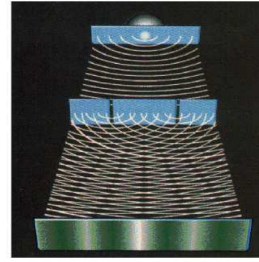
y esto es Bohr

La doble rendija

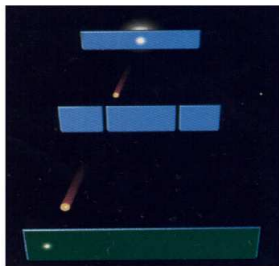
Para la luz ya sabemos que



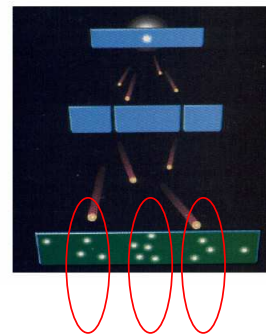
O sea que:

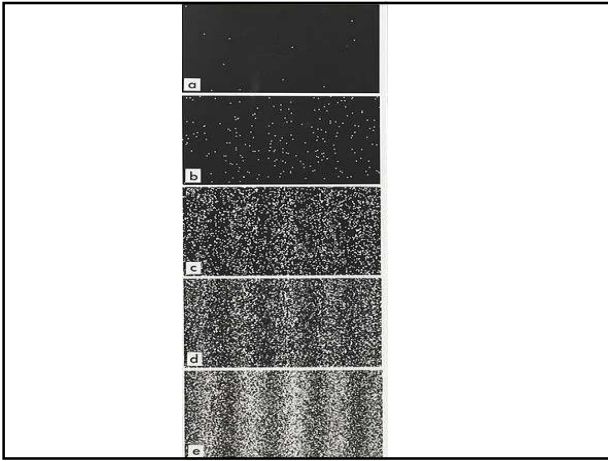


Para "bolas de billar"



Para electrones





Se hace el calculo usual, se estudia la diferencia de los caminos opticos, sea d la separacion de las rendijas, D la distancia a la pantalla, y es la posicion sobre la pantalla donde estudiamos las

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{D}$$

Donde $\frac{yd}{D}$ es la diferencia de caminos opticos

$$D_1 = \left[D^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx D + \frac{(y-d/2)^2}{2D}$$

$$D_2 = \left[D^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx D + \frac{(y+d/2)^2}{2D}$$

$$D_2 - D_1 \approx \frac{(y+d/2)^2}{2D} - \frac{(y-d/2)^2}{2D} = \frac{yd}{D}$$

con

$$D_1 = \left[D^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = D \left[1 + \frac{(y-d/2)^2}{D^2} \right]^{1/2} \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(y-d/2)^2}{D^2} + \dots \right]$$

La combinacion de las ondas con esa diferencia de fases da un amplitud

$$A(y) = 2A_0 \cos(\delta/2) = 2A_0 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{D} \cdot y\right)$$

Entonces como la intensidad es proporcional a A^2

$$I(y) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{D} \cdot y\right)$$

Que pasa si se estudia la formacion de la imagen como funcion del tiempo cuando la corriente de electrones es extremadamente baja?

Los analisis indican que el espectro:

- a) se hace electron a electron.
- b) conocido donde incidio un electron, no se puede predecir donde caera el otro.
- c) el espectro surge independientemente de la intensidad del flujo, aun cuando es tan bajo que no pueden incidir mas de uno por vez.

Resulta entonces que el $\cos^2()$ es proporcional a la probabilidad de presencia del electron en ese punto.

Sin embargo esto esta asociado al hecho que "tuvo que usar las propiedades ondulatorias" para decidir el espectro de interferencia.

Aquí AVI

Principio de incertidumbre

Ahora bien si el electron esta representada por la onda piloto y esta esta sobre toda la orbita, donde esta el electron?

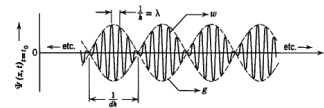
Por otro lado en este caso el momento del electron queda

perfectamente determinado

Pensamos ahora en los "paquetes de onda"

Hagamos una superposicion de dos ondas no moduladas de k y v apenas diferentes

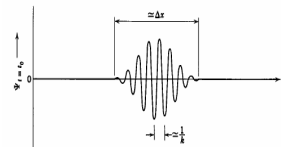
$$\Psi = \sin[2\pi(kx - vt)] + \sin[2\pi((k + \Delta k)x - (v + \Delta v)t)]$$



Vemos una secuencia de "grupos" Si consideramos solo uno de

ellos vemos una indeterminacion del orden de Δx

Si ahora sumamos un numero muy grandes de ondas con diferentes (infinitesimales) k, v



Aquí tenemos con todas las ondas coinciden en fase en el "centro del paquete" y mas alla de un dado Δx estan totalmente desfasados, luego allí se anulan.

De la teoria del analisis de fourier

$$\Delta x \Delta k \simeq \frac{1}{2\pi}$$

Si fuesen "ondas piloto", usando la suposicion de De Broglie que $k = 1/\lambda = p_x/\hbar \Rightarrow \Delta k = \Delta p/\hbar \Rightarrow$

$$\Delta x \Delta k = \Delta x \Delta p / \hbar \simeq \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \Delta p \simeq \frac{\hbar}{2\pi} = \hbar$$

Este es una forma del ppo. de incerteza enunciado por Heisemberg en 1927

Incerteza

$$\Delta x \Delta k = \Delta x \Delta p / \hbar \simeq \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \Delta p \simeq \frac{\hbar}{2\pi} = \hbar$$

$$\Delta E \Delta x \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p_x \rangle|$$

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta \theta_i \Delta J_i \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Parametro!

Ejemplo

Sean funciones de distribucion Gaussianas. Un paquete de ondas gaussiano

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{-x^2}{2(\Delta x)^2}\right)$$

$$\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2(\Delta x)^2}\right) \exp(ikx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(ikx) dx$$

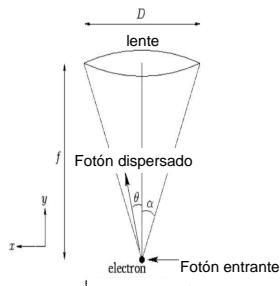
vuelve a dar una Gaussiana (autoreciproca)

$$\psi(k) \approx \exp(-k^2(\Delta x)^2/2) = \exp\left(\frac{-k^2}{2(\Delta k)^2}\right)$$

Si x esta muy bien determinado $\Rightarrow (\Delta x)$ es muy pequeño y por otro lado (Δk) es muy grande

El microscopio de Heisenberg

Sea el siguiente arreglo



El criterio de resolucion de Rayleigh

Dos fuentes puntuales son resueltas cuando el máximo principal de difracción de una de ellas coincide con el primer mínimo de la segunda

Para una apertura circular eso da :

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{D}$$

Con la resolución angular en radianes θ

Distancia focal

Para la resolucion espacial se obtiene

$$\Delta l \approx \frac{f\lambda}{D}$$

Ahora al intentar medir la posición del electron iluminamos al mismo y lo miramos
Con la lente colocando al electron a la distancia focal de la misma

$$\Delta x \approx f \frac{\lambda}{D}$$

Tenemos que

$$\tan \alpha = \frac{D/2}{f}, \quad \alpha \approx \frac{D}{2f}$$

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Entonces para determinar lo mejor posible la posición tenemos que minimizar

Sea el foton entrante $\rightarrow (k, 0)$

Sea el foton dispersado $\rightarrow (k \sin \theta, k \cos \theta)$

(suponemos que k no varía)

Entonces $\Delta k_x = k(\sin \theta - 1)$

$$\Delta p_x = \hbar k(\sin \theta - 1)$$

Por conservación de momento, el electrón cambiara lo mismo en modulo y de sentido contrario

Pero al observar por la lente no sabremos con precision θ entre $-\alpha$ y α

Luego:

$$\Delta p \approx 2\hbar k \sin \alpha \approx \frac{4\pi\hbar\alpha}{\lambda}$$

$$\Delta p \approx 2\hbar k \sin \alpha \approx \frac{4\pi\hbar\alpha}{\lambda}$$

Entonces para minimizar la incerteza en p debemos maximizar

$$\frac{\lambda}{\alpha}$$

Multiplicando Δx por Δp_x

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$

Otras consecuencias

Sea una caja de longitud L

Tenemos una partícula en la caja (solo decimos que la partícula está en la caja por incerteza

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{L}$$

además

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p - \langle p \rangle \rangle^2 = \langle p \rangle^2 \geq \left(\frac{\hbar}{L} \right)^2$$

Luego la energía media es

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \geq \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{L} \right)^2$$

Mediciones

Supongamos el siguiente experimento

Empezamos con el usual problema de las dos rendijas y se detecta en pattern usual de interferencia

La separación de las rendijas es d

Tiene un máximo en $\theta = 0$ y el primer mínimo está en $d \sin \theta = \lambda/2$, como θ es pequeño podemos decir que

$$\theta = \frac{\lambda}{2d}$$

El problema es saber cómo se entera que existe la rendija B si paso por la rendija A

Pero queremos determinar por dónde pasó el fotón (o lo que sea) por alguna rendija

Para ello "colocamos" electrones en la vecindad de las rendijas

Entonces determinamos por cuál rendija pasó viendo que le pasa a los electrones

Pero debemos determinar la posición de los electrones (en y) con una precisión del orden de $d/2$

Si

$d/2 \gg \Delta y \Rightarrow$

la incerteza en el momento segun y sera

$\Delta p_y \gg \frac{2\hbar}{d}$

Si el foton se movia en direccion de $\theta = 0$, con momento $p = \hbar/\lambda$ sera deflectado en una angulo cuya incerteza es

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta p_y}{p} \gg \frac{2\hbar}{d} \left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\pi d}$$

Esta incerteza "borra" el espectro de interferencia

Se puede hacer el experimento inverso, se envian electrones y se ilumina con luz

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta p_y}{p} \gg \frac{2\hbar}{d} \left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\pi d}$$

Esta incerteza "borra" el espectro de interferencia

Se puede hacer el experimento inverso, se envian electrones y se ilumina con luz