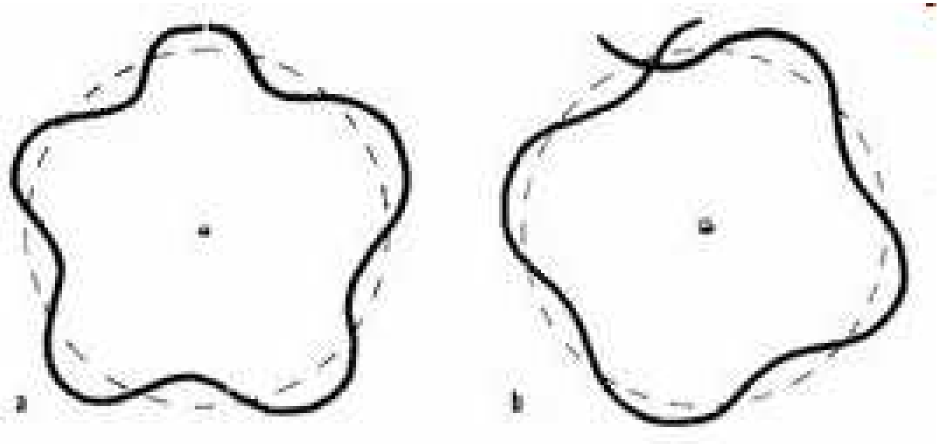
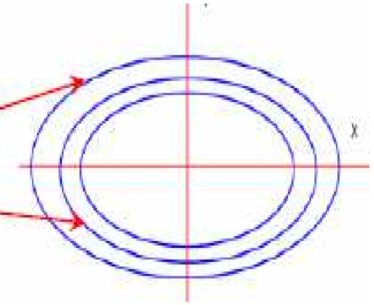
03_DeBroglie



Plank

$$\boxed{\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\beta x^2}$$

Consideremos dos elipses a ϵ y $\epsilon + \Delta\epsilon$.

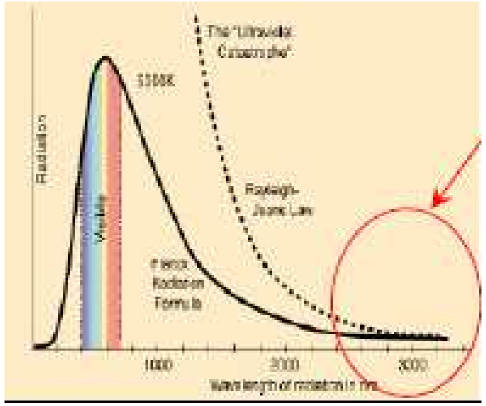


$$\boxed{S = \pi p_m x_m}$$

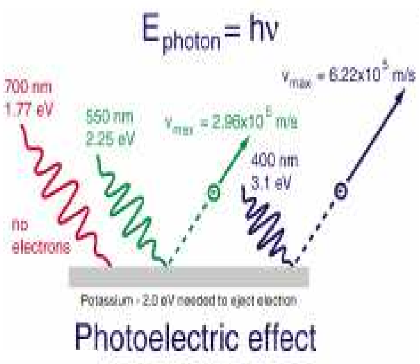
$$x_m = \sqrt{2\epsilon/\beta} \qquad p_m = \sqrt{2m\epsilon}$$

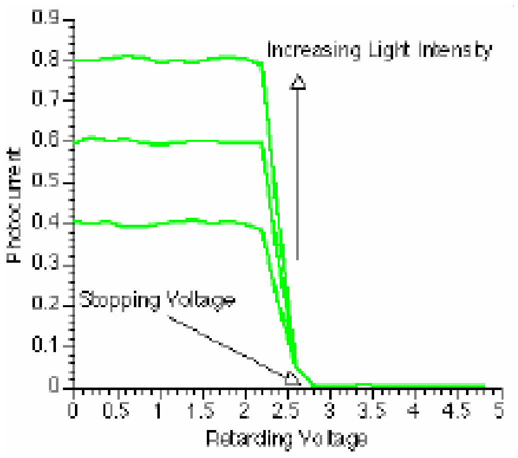
$$\boxed{S = 2\pi\epsilon\sqrt{m/\beta} = \epsilon/\nu}$$

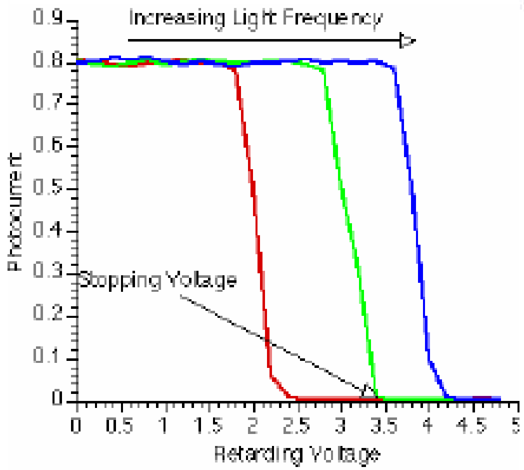
$$\langle\epsilon\rangle = \frac{E}{N} = \frac{h\nu}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}$$



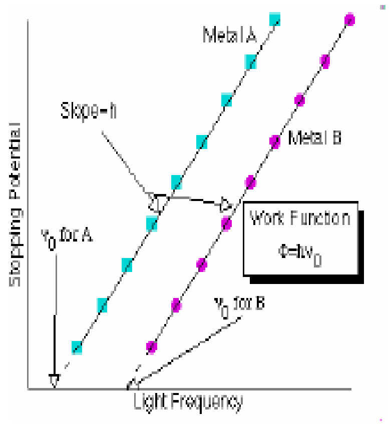
Einstein



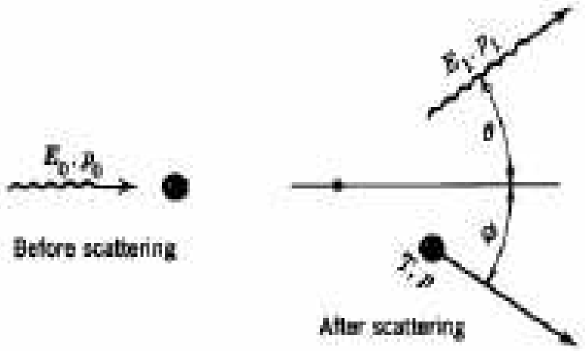




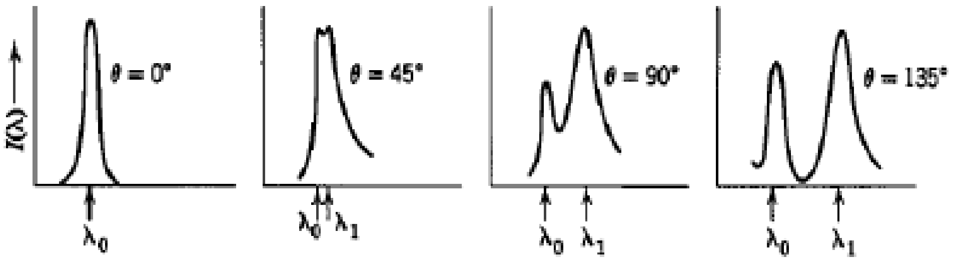
$$E = h\nu - W$$



Compton



$$\lambda_1 - \lambda_0 = (1-\cos\theta)\frac{h}{m_0 c} = \lambda_c(1-\cos\theta)$$



El modelo de Bohr

En 1913 Bohr desarrollo una teoria cuantitativa para describir este

fenomeno

Postulados:

1. **Un electron se mueve en una orbita circular alrededor del nucleo en el campo coulombiano, de acuerdo con la leyes de la mecanica clasica**

O sea que existe el nucleo, observar que habla de movimiento clasico.

2. **Las unicas orbitas posibles son aquellas para las que el momento angular orbital L es un multiplo entero de la constante de Planck dividida por 2π.**

Aqui introduce "cuantificacion" pero a diferencia de Planck, el no habla de energia sino de momento angular

$$\boxed{L = \frac{nh}{2\pi}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots}$$

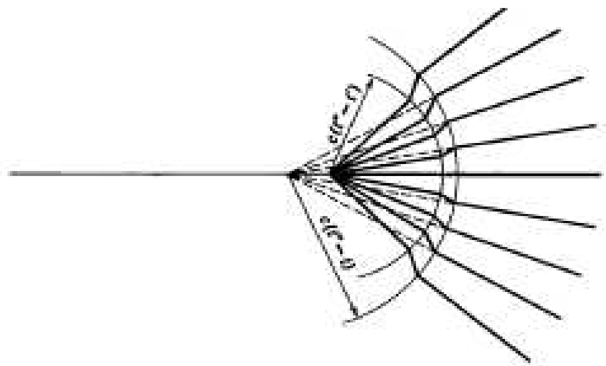
.

Recordemos que Planck propuso $E = nh\nu$, con $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

3.Si bien el electron esta constantemente acelerado, no emite radiacion electromagnetica. Luego su energia se mantiene cte.

Rompe con la vision clasica del electromagnetismo e introduce el concepto de la estabilidad del atomo.Pues al estar en una orbita

circular esta acelerado y por lo tanto deberia radiar



4. El electron emite radiacion electromagnetica si, estando en un estado de energia total E_i , hace una transicion a un estado de energia E_f (ambos compatibles con la condicion 2). La radiacion emitida en este caso es de frecuencia

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

Ver la analogia con Planck y su analisis de la emision de los osciladores!

Pero tambien vale en este caso para la absorcion!

Introduce esta regla de seleccion a la Einstein

Consistencia de Bohr y Plank

Supuso que los electrones no podian moverse sobre todos los "caminos Clasicos"

Luego de probar diferentes alternativas adopto a Plank y propuso

Sean E_1 y E_2 *las* energias del electron cuando se mueve en los "caminos" inicial y final, entonces

$$\upsilon = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

PEro cuales serían los caminos permitidos?

Como ya vimos su propuesta era que el momento angular del electron en una orbita circular alrededor del nucleo debia ser un multiplo de $h/2\pi$.

Observemos que Segun vimos al estudiar a Planck, las orbitas que correpondian a los osciladores eran elipses en el espacio pq

Teniamos que habiamos impuesto la condicion que el area determinada por la elipse debia tener un area multilo de h.

Este area es

$$\oint p_x dx$$

Con $\oint$ la integral sobre un ciclo completo.

observar que la integral es siempre positiva.

Recordemos la similitud entre un movimiento circular (proyeccion) y un movimiento oscilatorio

Sea ahora el electron

Sean ahora las variables conjugadas , el desplazamiento ϕ y el momento p_ϕ que es el momento angular usual, luego, usando plank

$$\oint p_\phi d\phi = nh$$

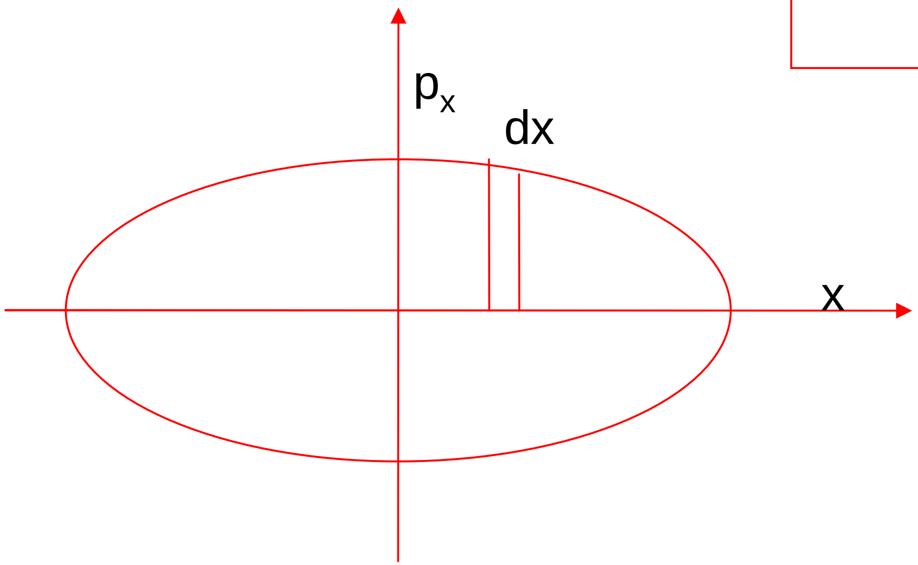
(potencial central)

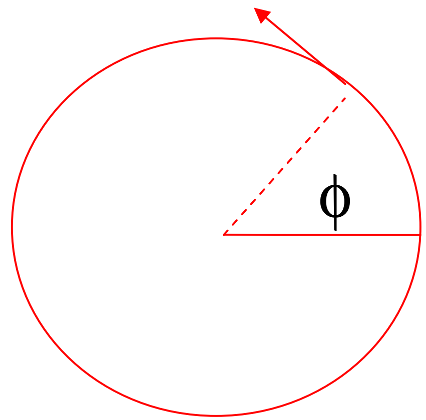
Pero p_ϕ es constante, luego

$$\boxed{\oint p_\phi d\phi = p_\phi \oint d\phi = 2\pi p_\phi = nh}$$

Entonces

$$\boxed{p_\phi = \frac{nh}{2\pi}}$$





Ahora si De Broglie

Basicamente supone que: dado que la radiacion electromagnetica, que habia sido supuesta como puramente ondulatoria pero que luego se habia manifestado como corpuscular, entonces lo corpuscular tambien deberia presentar propiedades ondulatorias

"a la naturaleza le gusta la simetria"

Supone que, dado que la energia de la luz esta concentrada en los fotones llevan "algun tipo de onda asociada" que permitan describir los procesos de interferencia

Entonces llevando esta similitud al extremo

Supone que la propagacion de corpusculos esta gobernado por el comportameinto de cierta""ondas piloto"

Cual es la longitud de onda de las ondas piloto?

La relacion de Einstein para el efecto fotoelectrico es

$$\boxed{E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h}}$$

Sea v' la velocidad

Con $\lambda = v'/\nu$ pues $\lambda = v'\tau$ con τ el periodo y $\nu = 1/\tau$.

Para el caso de la luz

Luz

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E}}$$

En este caso vale que $p = E/c$ y entonces (luz)

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{[E/c]} = \frac{h}{p}}$$

Entonces, De Broglie (en forma mas complicada tanto que incluye en su razonamiento que la masa del foton es distinta de 0) propone llevando el concepto de simetria al extremo que: (1924 Phil.Mag.)

Para particulas la longitud de las onda y frecuencia de las ondas piloto es

Para partículas

$$\boxed{\lambda = h/p \quad \text{y} \quad \nu = \frac{E}{h}}$$

!

Relativistic energy & **momentum**

Relacion de Einstein para la energia

$$E = mc^2$$

Que incluye a la energia cinetica y la energia asociada a la mas en reposo

La masa relativista es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

Momento relativista

$$p = \frac{m_0 v'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma m_0 v' \Rightarrow$$

$$p^2c^2 = \frac{m_0^2 v'^2 c^2}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 \frac{v'^2}{c^2} c^4}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} =$$

$$p^2c^2 = \frac{m_0^2 (\frac{v'^2}{c^2} - 1) c^4}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} =$$

$$= -m_0^2 c^4 + m^2 c^4$$

Luego

$$p^2c^2 = (mc^2)^2 - m_0^2c^4$$

donde m es la masa relativista y m_0 es la masa en reposo

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

La energia cinetica relativista es

$$\begin{aligned} E_K &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= m_0c^2(\gamma - 1) \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} - 1\right) \end{aligned}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} E_K &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v'^4}{c^4} + \ldots\right) = \\ &= m_0\frac{1}{2}v'^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v'^4}{c^2} + \ldots \end{aligned}$$

Para $v' << c \ldots$

Para el foton la expresion $p = \frac{m_0 v'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma m_0 v'$ tiene problemas,

entonces usamos

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Que con $m_0 = 0 \Rightarrow$

$$E = pc \Rightarrow$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Las onda piloto

la velocidad de propagacion de las ondas piloto

$$\boxed{v' = \nu\lambda = \frac{E}{h}\frac{h}{p} = \frac{E}{p}}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda = h/p \\ \text{y} \\ \nu = \dfrac{E}{h} \end{array}\right.$$

Usando la forma relativista de la energia

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$$

Entonces

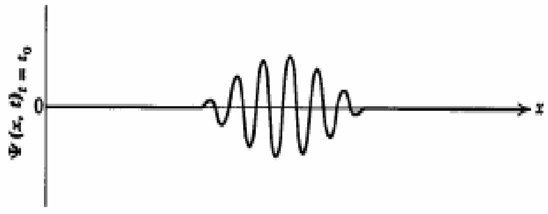
$$\boxed{v' = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{p^2c^2 + (m_0c^2)^2}}{p}}$$

O sea

$$\boxed{v' = c\sqrt{1 + (m_0 c/p)^2}}$$

y por lo tanto $v' \geq c$!

Pero esto es para una onda monocromatica y si queremos , transmitir informacion necesitamos algo del tipo



oup of pilot waves.

Sea la onda monocromatica plana

$$\boxed{\Psi(x,t) = \sin 2\pi(x/\lambda - vt) = \sin 2\pi(kx - vt)}$$

Que es senoidal para x fijo o t fijo y que tiene nodos en los 0 del seno que son cuando $2\pi(kx - vt) = n\pi$ o sea para $\boxed{x_k = \frac{n}{2b} + \frac{v}{k}t}$

entonces si calculamos

k

$$\boxed{v' = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{v}{k} = v\lambda}$$

Pero que ocurre si sumamos dos de estas?

$$\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) = \sin 2\pi(kx - vt) +$$

$$+ \sin 2\pi((k + dk)x - (v + dv)t)$$

(difieren poco)

$$\boxed{\text{Tenemos entonces: } \sin(A) + \sin(B)}$$

Como

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\sin(2A)+\frac{1}{2}\sin(2B) = \qquad \left\{\frac{1}{2}2\sin(A)\cos(A)+\frac{1}{2}2\sin(B)\cos(B)\right\}$$

$$=\cos B\sin B+\sin A\cos A$$

$$=\cos^2 A(\cos B\sin B)+\sin^2 A(\cos B\sin B)+\cos^2 B(\sin A\cos A)+\sin^2 B(\cos A\sin A)$$

Suman 1

$$=$$

$$\cos^2 A\cos B\sin B+\cos A\cos^2 B\sin A+\cos A\sin A\sin^2 B+\cos B\sin^2 A\sin B=$$

$$=(\cos A\cos B+\sin A\sin B)(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$

$$\cos(A-B)\sin(A+B) =$$

$$\boxed{\text{De donde}\quad \sin(2A')+\sin(2B')=2\cos(A'-B')\sin(A'+B')}$$

$$\boxed{\sin A+\sin B = 2\cos\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}$$

Con 2A’ = A

producto

Teníamos :

$$\sin A + \sin B = 2\cos\left[\frac{1}{2}(A - B)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]$$

Haciendo

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 2\pi(kx - vt) \\ B &= 2\pi((k + dk)x - (v + dv)t) \end{aligned}}$$

#

#

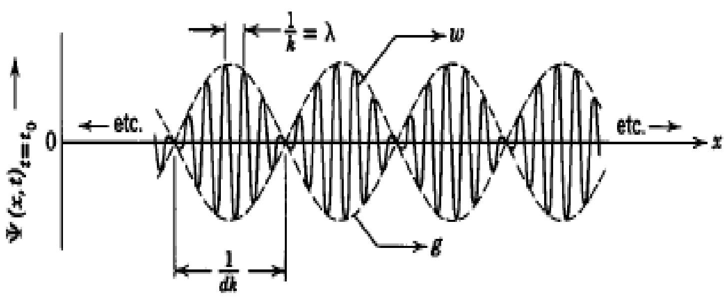
Queda

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}(A - B) &= \pi(kx - vt) - \pi((k + d_k)x - (v + d_v)t) = -\pi(xd_k - td_v) \\ \frac{1}{2}(A + B) &= \pi(kx - vt) + \pi((k + d_k)x - (v + d_v)t) = \pi(xd_k - 2tv - td_v + 2kx) \end{aligned}}$$

Como $dk \ll k$ y $d\nu \ll \nu$ se desprecian en la segunda y obtenemos

$$\boxed{\Psi(x,t) = 2\cos 2\pi\left(x\frac{dk}{2} - t\frac{d\nu}{2}\right)\sin 2\pi(kx - \nu t)}$$

cuya grafica es



Aparece entonces la onda original modulada por una de frecuencia menor

$$\Psi(x,t) = 2\cos 2\pi\left(x\frac{dk}{2} - t\frac{d\nu}{2}\right)\sin 2\pi(kx - \nu t)$$

para la original valen los resultados ya obtenidos

$$v = \nu/k$$

$$\Psi(x,t) = 2\cos 2\pi\left(x\frac{dk}{2} - t\frac{d\nu}{2}\right)\sin 2\pi(kx - \nu t)$$

y para la otra

$$\boxed{g = \frac{d\nu}{dk}}$$

Estos resultados para la suma de 2 se extienden para la suma de infinitos y se obtiene lo mismo

Entonces

$$\boxed{\upsilon = \frac{E}{h} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}}$$

De donde

$$\boxed{d\upsilon = \frac{dE}{h} \qquad dk = \frac{dp}{h}}$$

Recordando la definicion de *g*

$$\boxed{g = \frac{d\upsilon}{dk} = \frac{dE}{dp}}$$

Pero tenemos para la energia

$$\boxed{E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$$

De donde podemos calcular la derivada correspondiente

$$\boxed{2E\,dE = c^2\,2p\,dp}$$

De donde resulta que

$$\boxed{\frac{dE}{dp} = c^2\,\frac{p}{E}}$$

O sea que para la velocidad de grupo *g*

$$\boxed{g = c^2\,\frac{p}{E}}$$

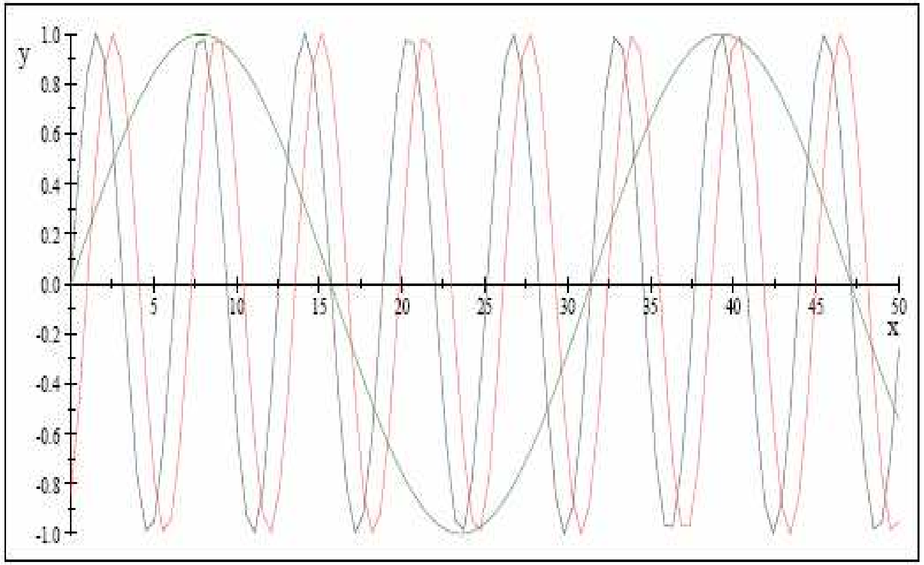
Pero entonces con $E=mc^2$

$$\boxed{g = c^2\,\frac{mv'}{mc^2} = v'}$$

Recuperamos la velocidad de la partícula

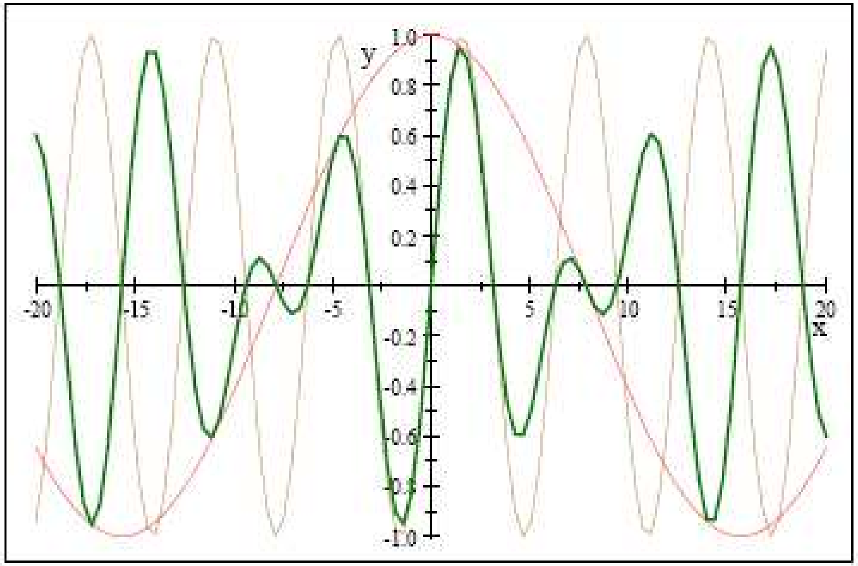
Algunos dibujos

$\sin(x)$

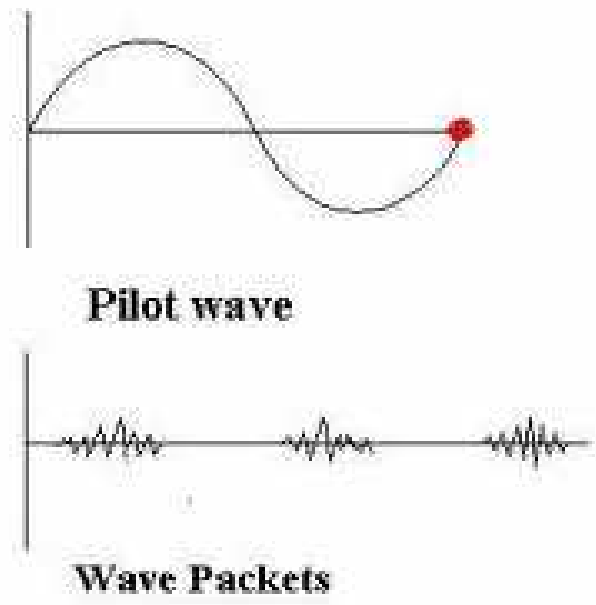


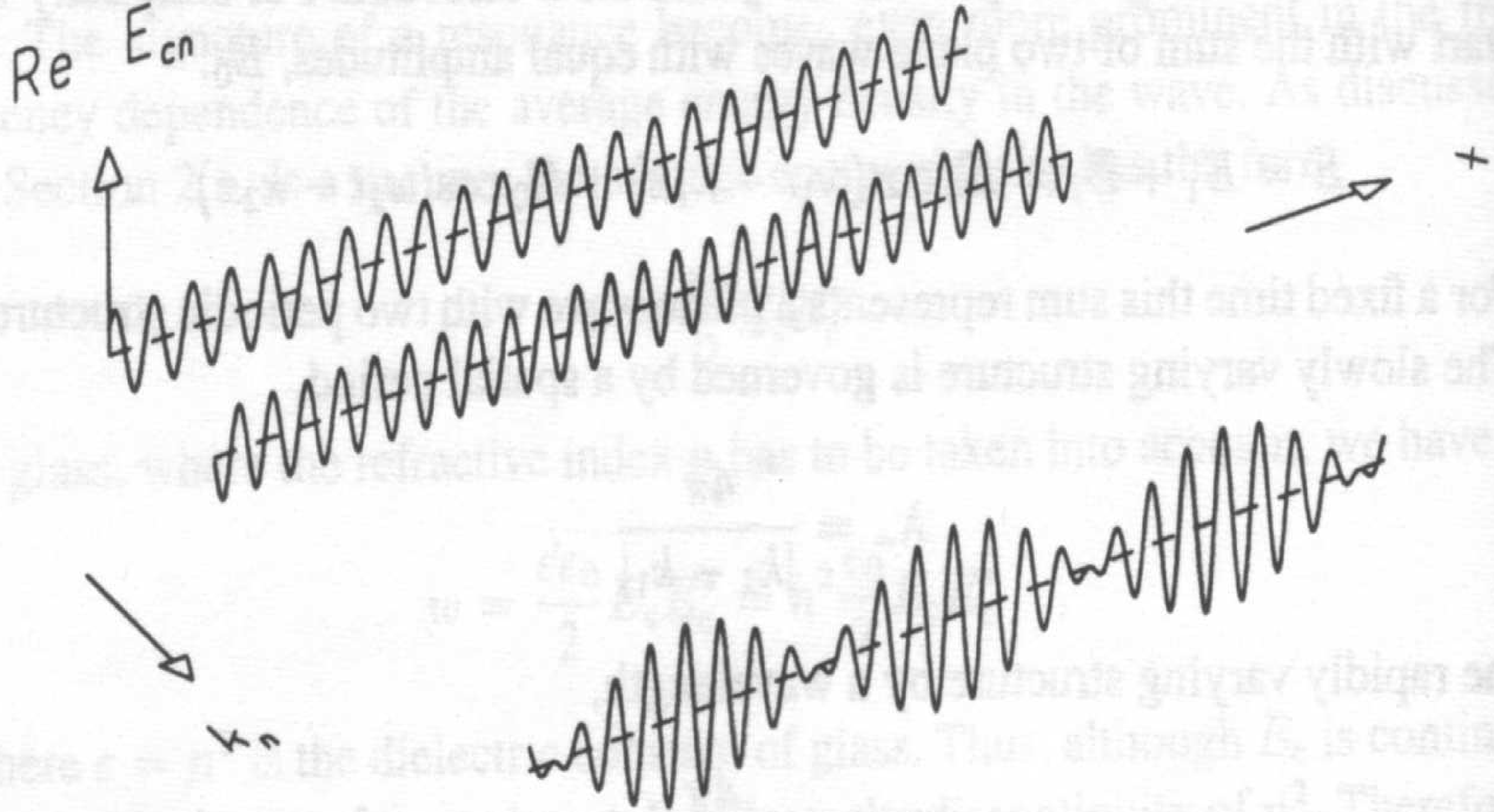
Black$\Rightarrow$ $\sin x$, Red$\Rightarrow$ $\sin(x-1)$, green$\Rightarrow$ $\sin(0.2x)$

$\sin(x)$

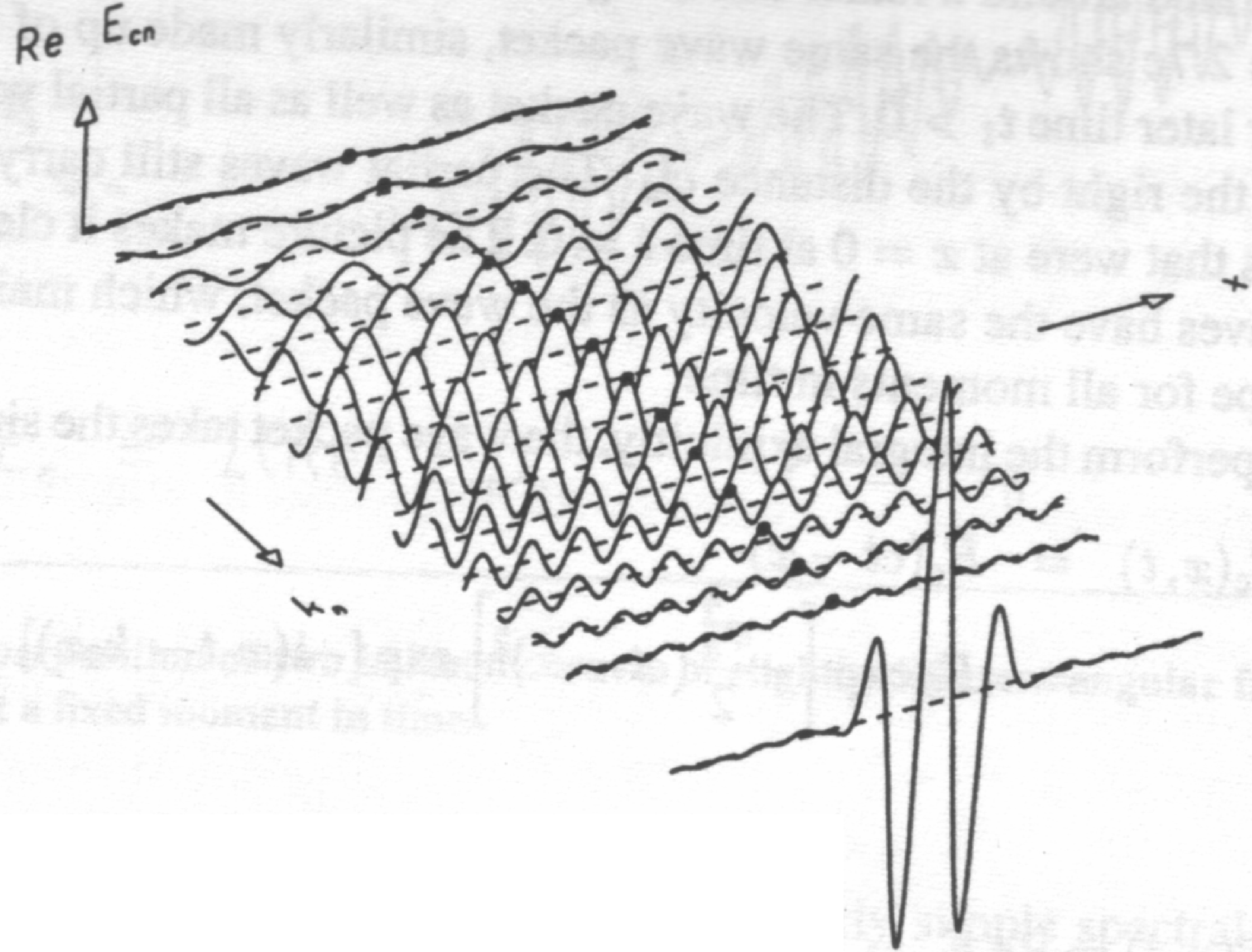


sin(x) , cos(0.2x) (red) el producto es green y grueso


Pilot wave
Wave Packets



Re E_{cn}
t



Re E_{cn}
t

Confirmacion experimental

Para que se verifiquen las propiedades ondulatorias de particulas debera presentarse cuando las dimensiones tipicas del problema (por ejemplo una rendija) sean del orden de la longitud de onda

$$\lambda = h/p$$

$$\boxed{h = 6.62 \times 10^{-27} erg - \sec}$$

Sea un electron con $T = 10\ eV = 1.6 \times 10^{-11} ergs$ y con masa $m = 9.11 \times 10^{-28} gm$

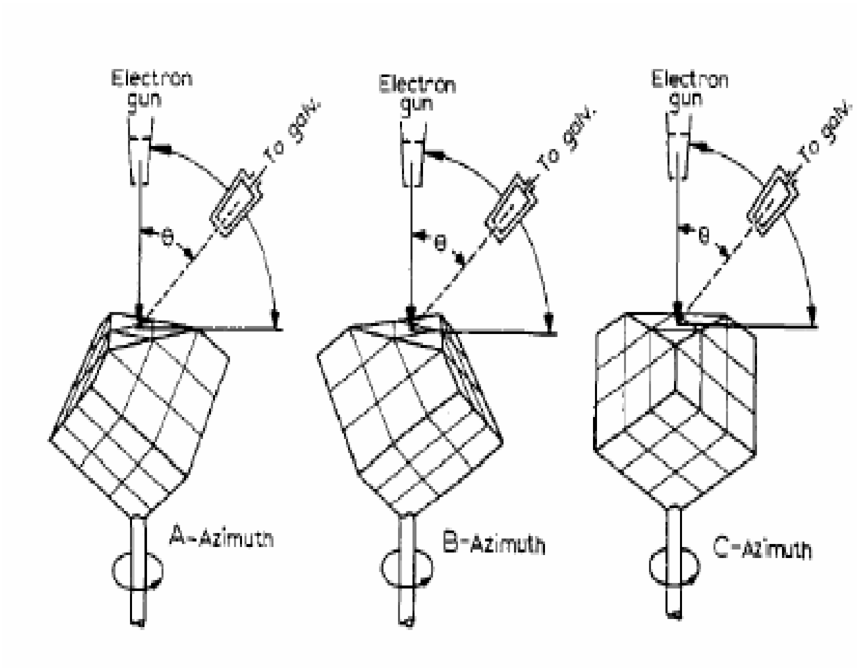
$$p = \sqrt{2mT} = \left[2 \times 9.11 \times 10^{-28} gm \times 1.6 \times 10^{-11} gm \frac{cm^2}{s^2} \right]^{1/2} =$$

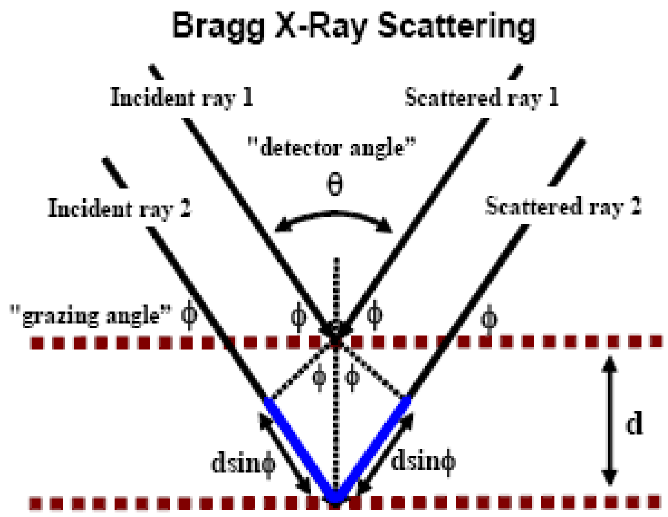
$$\approx 1.7074 \times 10^{-19} gm \frac{cm}{s}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{6.62 \times 10^{-27} erg - \sec}{1.7074 \times 10^{-19} gm \frac{cm}{s}} = 3.9 \times 10^{-8} cm}$$

O sea que es del orden del tamaño de un atomo

Davisson y Germmer estaban trabajando haciendo incidir electrones sobre una muestra de niquel, tuvieron un accidente y para "limpiar" la muestra la calentaron, pero resulta que en el proceso se les cristalizo, como los resultados de la reflexion daban resultado extraños repitieron los experimentos con un "sigle cristal"





$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2d\sin\phi,$$

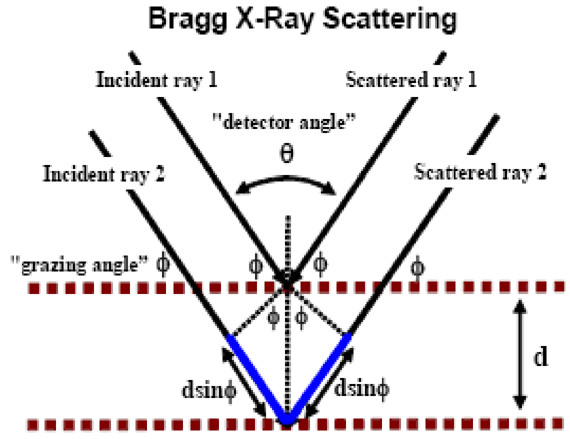
Encontraron que se comportaban basicamente como la difraccion de rayos x

Usaron electrones de 54eV

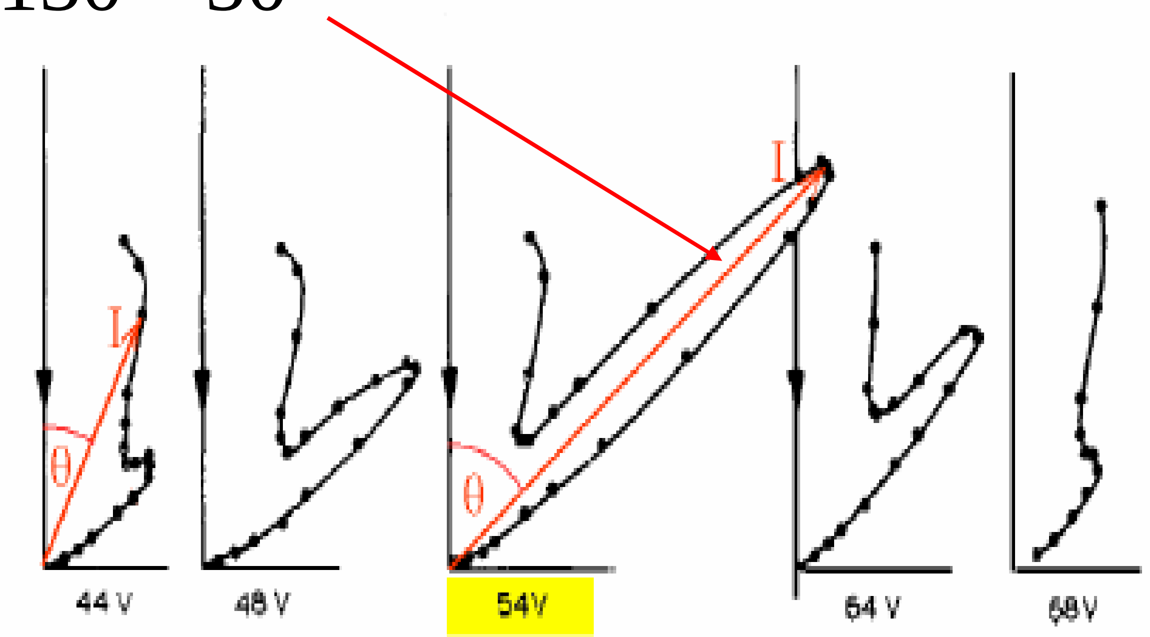
$\lambda \approx 0.167x10^{-9}m$

La distancia d para $Ni \rightarrow d \approx 0.092x10^{-9}m$

$$\sin\phi_1 = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.167nm}{2(0.092nm)} \approx 0.908 \qquad \phi_1 \approx 65^{\circ}.$$



$$\theta = \pi - 2\phi = 180^{\circ} - 130^{\circ} = 50^{\circ}$$



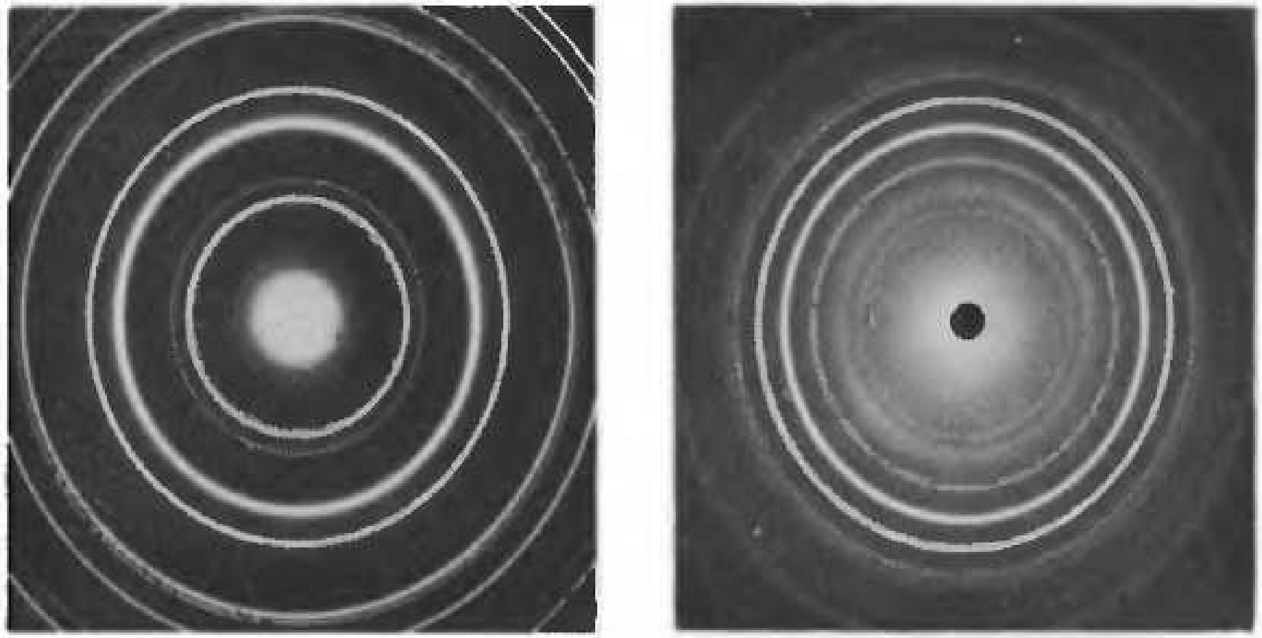
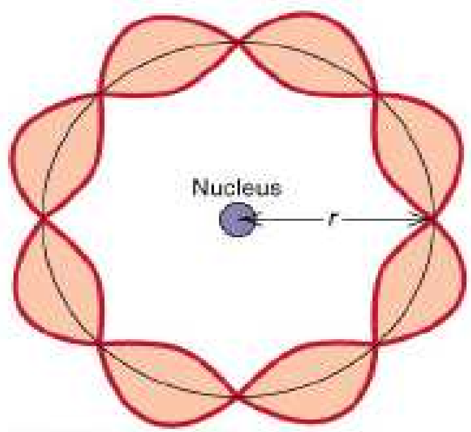


Figure 6–6. Left: The ring pattern produced in the scattering of electrons by gold crystals. Right: The ring pattern produced in the scattering of X-rays by zirconium oxide crystals. From U. Fano and L. Fano, *Basic Physics of Atoms and Molecules*, John Wiley and Sons, New York, 1959.

La regla de cuantificacion de Bohr

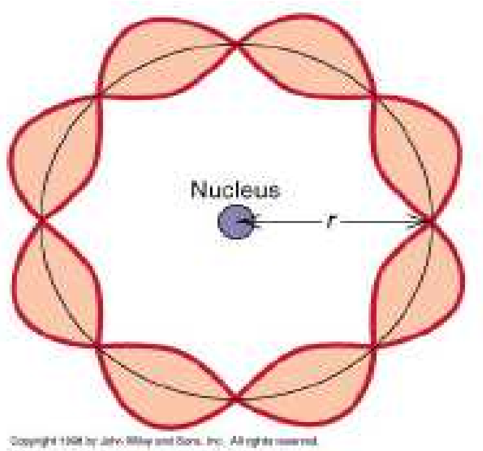
De broglie mostraba en su tesis que una verificacion de su modelo era que podia explicar las orbitas de Bohr

Efectivamente si se considera que en las orbitas las ondas asociadas a los electrones deben ser ondas estacionarias⇒



Imponiendo la condición de onda estacionaria

$$2\pi\, r = n\lambda \qquad \text{con } n = 1,2,3$$



De donde $$\boxed{\frac{hr}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi}}$$

pero con $p = \dfrac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow$

$$\frac{hr}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi} = pr = mvr = L$$

$$\boxed{L = n\hbar}$$

y esto es Bohr

Principio de incertidumbre

Ahora bien si el electron esta representada por la onda piloto y esta esta sobre toda la orbita, donde esta el electron?

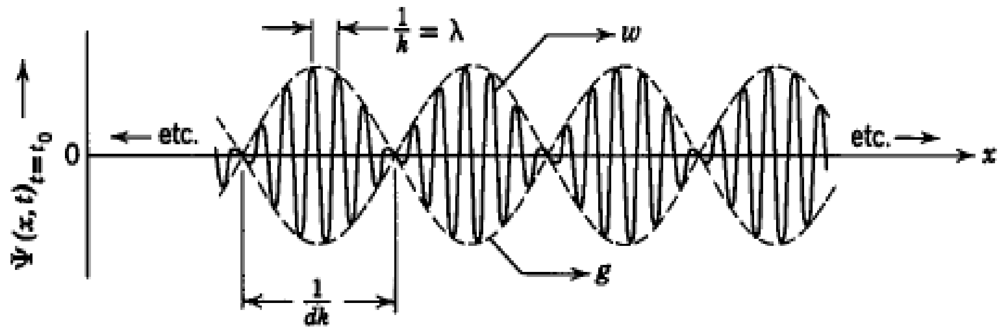
Por otro lado en este caso el momento del electron queda

perfectamente determinado

Pensamos ahora en los "paquetes de onda"

Hagamos una superposicion de dos ondas no moduladas de k y v apenas diferentes

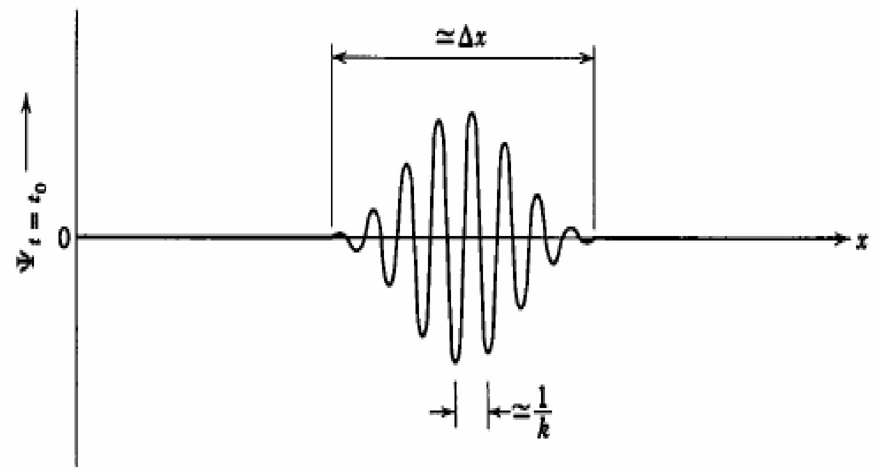
$$\boxed{\Psi = \sin[2\pi(kx - vt)] + \sin[2\pi((k + \Delta k)x - (v + \Delta v)t)]}$$



Vemos una secuencia de "grupos" Si consideramos solo uno de

ellos vemos una indeterminacion del orden de Δx

Si ahora sumamos un numero muy grandes de ondas con diferentes (infinitesimales) k, ν



Aqui tenemos con todas las ondas coinciden en fase en el "centro del paquete" y mas alla de un dado Δx estan totalmente desfasados, luego alli se anulan.

De la teoria del analisis de fourier

$$\boxed{\Delta x \Delta k \simeq \frac{1}{2\pi}}$$

Si fuesen "ondas piloto", usando la suposicion de De Broglie que $k = 1/\lambda = p_x/h \Rightarrow \Delta k = \Delta p/h \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta x \Delta k = \Delta x \Delta p/h \simeq \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \Delta p \simeq \frac{h}{2\pi} = \hbar}$$

Este es una forma del ppo. de incerteza enunciado por Heisemberg en 1927

Ejemplo

Sean fundiones de distribucion Gaussianas. Un paquete de ondas gaussiano

$$\psi(x) = A\exp\left(\frac{-x^2}{2(\Delta x)^2}\right)$$

$$\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2(\Delta x)^2}\right)\exp(ikx)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\exp(ikx)dx$$

vuelve a dar una Gaussiana (autoreciproca)

$$\boxed{\psi(k) \approx \exp\left(-k^2(\Delta x)^2/2\right) = \exp\left(-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}\right)}$$

Si x esta muy bien determinado $\Rightarrow$ (Δx) es muy pequeño y por otro lado (Δk) es muy grande