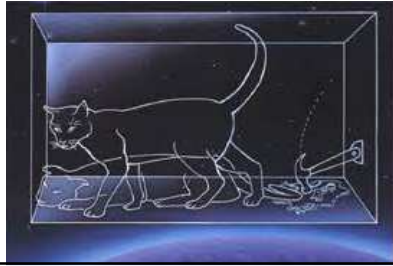


SCH\_3\_?



## Problemas unidimensionales Estados ligados unidimensionales

Resolveremos un par de casos simples en pozos de potencial que confinan partículas

Las condiciones que debe satisfacer un función de onda son:

Las autofunciones  $\psi(x)$  deben ser tales que aquello que este ligado a la observacion este bien definido

La "parte observable" de  $\Psi(x,t)$  es

$$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

y/o

$$S(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right]$$

Luego para que estas magnitudes esten bien definidas, DEBERA CUMPLIRSE

- 1  $\psi(x)$  finita
- 2  $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$  finita
- 3  $\psi(x)$  continua
- 4  $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$  continua

Pues de no ser asi...si **no se cumple**

- 1)  $\Rightarrow$  la probabilidad no esta definida
- 2)  $\Rightarrow$  S no esta bien definida
- 3)  $\Rightarrow$  no se cumple 2)

4)  $\Rightarrow$  como

$$\frac{1}{\psi(x)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) \right] = C$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]\psi(x)$$

Entonces para  $V(x)$  y  $E$  finitos con  $\psi(x)$  finita por 1)  $\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$  luego  $\frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$  debe ser continua

### Pozo Cuadrado

Si  $E > V_0$  ondas viajeras  
 Si  $E < V_0$  ondas estacionarias

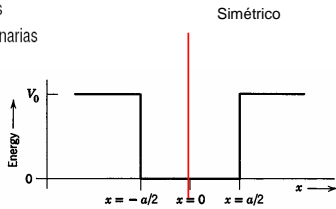


Figure 8-14. A square well potential.

Ya tenemos idea de cómo es la cosa aquí.

### Generalidades

Sea un potencial arbitrario, simétrico alrededor de  $x = 0 \Rightarrow$

Entonces las funciones de onda deben satisfacer  $|\psi(+x)|^2 = |\psi(-x)|^2$

Par o impar

Entonces se debe satisfacer  $\psi(-x) = \psi(x)$  o  $\psi(-x) = -\psi(x)$

La solución de la independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x)$$

o

$$\psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

Aparecerá  
Un  $k^2$

Sea ahora  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{2mE}/\hbar = p/\hbar = h/\lambda\hbar = 2\pi/\lambda$

Las soluciones son ("dentro del pozo")

$$\psi(x) = A \cos(kx) = A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right), \text{ (par)}$$

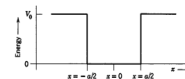
$$\psi(x) = B \sin(kx) = B \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right), \text{ (impar)}$$

Entonces para  $|x| > a'$

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\psi(x) = \alpha^2\psi(x)$$

Nuestra experiencia nos indica que la solución apropiada es la que se va a 0 en la zona "clásicamente prohibida"

### Usando el potencial del gráfico



O sea

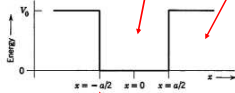
$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -\frac{a}{2}, x > +\frac{a}{2} \\ 0 & -\frac{a}{2} < x < +\frac{a}{2} \end{cases}$$

En la región  $|x| > a'$

$$\psi''(x) = \alpha^2\psi(x) \Rightarrow \psi = C \exp(\pm\alpha x)$$

Nos quedamos con el – por razones obvias

Asi que tenemos las soluciones dentro del pozo y las fuera del pozo  
 Pero  $\Psi$  debe ser continua y  $\Psi'$  tambien pero esto vale para el caso  
 en que  $V$  no sea  $\infty$  (no tenga un salto  $\infty$ )



Se debe garantizar la continuidad aqui

### Sea el pozo infinito

Sea  $V \rightarrow \infty$

(existe un tal potencial?)

(que problemas surgen en el contorno?)

!

La condicion de contorno es  $\Psi(x) = 0$  en  $x = \pm a'$  (pues

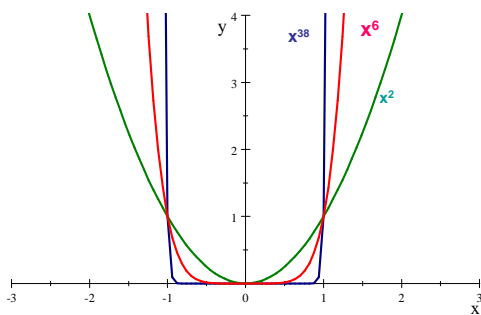
$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)} \rightarrow \infty)$$

Corresponde entonces (pares)

$$A \cos(ka') = 0$$

De donde

$$k_n = n \left( \frac{\pi}{2a'} \right), \text{ con } n = 1, 3, 5, \dots$$



### Sea el pozo infinito

Sea  $V \rightarrow \infty$

(existe un tal potencial?)

(que problemas surgen en el contorno?)

!

La condicion de contorno es  $\Psi(x) = 0$  en  $x = \pm a'$  (pues

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)} \rightarrow \infty)$$

Corresponde entonces (pares)

$$A \cos(ka') = 0$$

De donde

$$k_n = n \left( \frac{\pi}{2a'} \right), \text{ con } n = 1, 3, 5, \dots$$

Para las soluciones impares

$$B \sin(ka) = 0$$

De donde

$$k_n = n \left( \frac{\pi}{2a} \right), \text{ con } n = 2, 4, 6, \dots$$

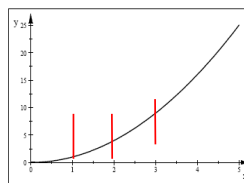
Luego los posibles valores de  $k$  son (tomando en cuenta ambas soluciones)

$$k_n = n \left( \frac{\pi}{2a} \right), \text{ con } 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

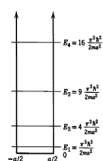
De esta forma

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

$n^2$



Llamando a  $a \rightarrow a/2$



El número  $n$  que regula los valores de la energía se llama "número cuántico"

Hay que determinar las constantes  $A$  y  $B$

$$\begin{cases} \psi(x) = A \cos(kx) = A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right), \text{ (par)} \\ \psi(x) = B \sin(kx) = B \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right), \text{ (impar)} \end{cases}$$

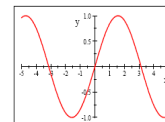
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = 1 = \int_{-a}^a A^2 \cos^2\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) dx$$

Tomando en cuenta la integral del  $\cos^2$

$$\int \cos^2(bx) dx = \frac{1}{2b} (\sin 2bx + 2bx) \Rightarrow$$

con  $b = n \frac{\pi}{2a} \Rightarrow \sin 2bx = \sin 2n \frac{\pi}{2a} x = \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right)$  que en  $a$  da  $\sin(n\pi)$  con  $n = 1, 3, 5, \dots$  se hace 0

$\sin(x)$



Queda entonces el segundo término  $\left(\frac{1}{4b}\right)(2bx)$

Luego el resultado es  $x/2 \Rightarrow a/2 + a/2 = a \Rightarrow A^2 = \frac{1}{a} \Rightarrow A = 1/\sqrt{a}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = 1 = \int_{-a}^a A^2 \cos^2\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) dx$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Para el otro caso obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = 1 = \int_{-a}^a A^2 \sin^2\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) dx$$

$$\int \sin^2(bx) dx = -\frac{1}{4b} (\sin 2bx - 2bx) \text{ que es lo mismo que antes} \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

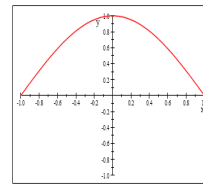
De donde para  $n$  impar

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(n \frac{\pi}{2a} x\right)$$

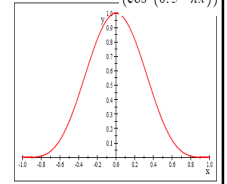
De donde para  $n$  par

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(n \frac{\pi}{2a} x\right)$$

$\Psi$



$\Psi^2$

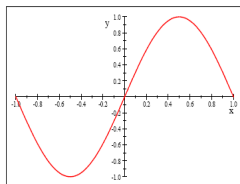


Para  $n = 1$  y  $a = 1$

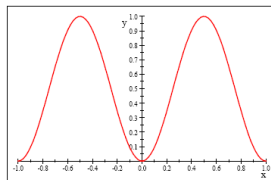
$\cos(0.5 \cdot \pi x)$

Para  $n$  par deberiamos tener una funcion no simetrica  
 $\sin(\pi x)$

$\Psi$



$\Psi^2$



En este caso podemos construir la ecuacion dependiente del tiempo

$$\Psi_n(x, t) = \exp(-i\omega_n t) \psi_n(x)$$

Donde  $\omega_n = E_n/\hbar$

**Calculo de valores de expectacion**

a)  $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* x \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi_n^* \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi_n^* \psi_n dx$$

Que resulta ser

$$\langle x \rangle = \int_{-a}^a \frac{1}{a} x \cos^2(k_n x) dx = 0$$

b)  $\langle x^2 \rangle$

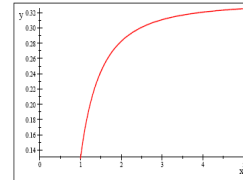
$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^a \frac{1}{a} x^2 \cos^2(k_n x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a x^2 \cos^2(kx) dx &= 2 \int_0^a x^2 \cos^2(kx) dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a x^2 \cos^2(kx) dx &= \frac{1}{48k^3 a} (8k^3 x^3 - 6 \sin 2kx + 12k^2 x^2 \sin 2kx + 12kx \cos 2kx) \\ &= \frac{1}{48k^3 a} (8k^3 a^3 - 6 \sin 2ka + 12k^2 a^2 \sin 2ka + 12ka \cos 2ka - 1) \end{aligned}$$

Como usamos  $\cos^2$  significa que  $n$  es impar y resultará

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} \right)$$



Para  $\langle p \rangle$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* p(x) \Psi_n dx$$

Para  $\langle p \rangle$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* p(x) \Psi_n dx$$

Pero no podemos conocer  $p(x)$  por incerteza

Para este caso lo resolvemos facilmente

$$\cos(k_n x) = \frac{1}{2} [\exp(ik_n x) + \exp(-ik_n x)]$$

entonces

$$\begin{aligned} a^{-1/2} \exp(-i\omega_n t) \cos(k_n x) &= \frac{1}{2} a^{-1/2} [\exp(ik_n x - i\omega_n t) + \exp(-ik_n x - i\omega_n t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2a)^{-1/2} \exp(ik_n x - i\omega_n t) + \frac{1}{\sqrt{2}} (2a)^{-1/2} \exp(-ik_n x - i\omega_n t) \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned} \phi_D &= (2a)^{-1/2} \exp(ik_n x - i\omega_n t) \\ \phi_I &= (2a)^{-1/2} \exp(-ik_n x - i\omega_n t) \end{aligned}$$

Donde  $\phi_D$  es una onda que se mueve a la derecha

Donde  $\phi_I$  es una onda que se mueve a la izquierda

Que tienen la propiedad que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \phi_D^* \phi_D dx &= \int_{-a}^a \phi_I^* \phi_I dx = 1 \\ \int_{-a}^a \phi_D^* \phi_I dx &= \int_{-a}^a \phi_I^* \phi_D dx = 0 \end{aligned}$$

Entonces si escribimos

$$\begin{aligned} \Psi &= C_1 \phi_D + C_2 \phi_I \Rightarrow \\ \int \Psi^* \Psi dx &= 1 = \int (C_1 \phi_D + C_2 \phi_I)^* (C_1 \phi_D + C_2 \phi_I) dx \end{aligned}$$

y usando las relaciones anteriores resulta que  $C_1^2 = \frac{1}{2}$  y  $C_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$  tenemos una probabilidad  $\frac{1}{2}$  de medir  $p = \hbar k_n$  o  $p = -\hbar k_n$

## Sea el pozo finito

En la region de  $V=0$

$$\psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

Para resolver el problema planteamos la solucion mas general

para  $-a/2 < x < a/2$

$$\psi(x) = A \sin K_I x + B \cos K_I x$$

Como antes  $K_I = \sqrt{2mE}/\hbar$

Para las regiones **clasicamente inaccesibles** (tomando en cuenta que el potencial es simetrico)

para  $x < -a/2$

$$\psi(x) = C \exp(K_{II}x) + D \exp(-K_{II}x)$$

para  $x > +a/2$

$$\psi(x) = F \exp(K_{II}x) + G \exp(-K_{II}x)$$

divergencia

Con

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$E < V_0$$

Como la probabilidad debe estar bien definida  $\Rightarrow$

$$D = 0 \text{ y } F = 0$$

Es decir que las  $\psi$  deben ser finitas.

Con las funciones anteriores aplicamos las condiciones de continuidad (la funcion y su derivada) en las interfases

En  $-a/2$  para  $\psi$  (con  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ )

$$-A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) = C \exp(-K_{II} a/2)$$

En  $-a/2$  para  $\psi'$

$$AK_I \cos(K_I a/2) + BK_I \sin(K_I a/2) = CK_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

En  $-a/2$  para  $\psi$  (con  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ )

$$-A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) = C \exp(-K_{II} a/2)$$

En  $-a/2$  para  $\psi'$

$$AK_I \cos(K_I a/2) + BK_I \sin(K_I a/2) = CK_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

En  $a/2$  para  $\psi$

$$A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) = G \exp(-K_{II} a/2)$$

En  $a/2$  para  $\psi'$

$$AK_I \cos(K_I a/2) - BK_I \sin(K_I a/2) = -GK_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

La tercera menos la primera

$$\begin{bmatrix} A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) \\ +A \sin(K_I a/2) - B \cos(K_I a/2) \end{bmatrix} = G \exp(-K_{II} a/2) - C \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2A \sin(K_I a/2) = (G - C) C \exp(-K_{II} a/2)$$

La tercera mas la primera

$$\begin{bmatrix} -A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) \\ +A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) \end{bmatrix} = C \exp(-K_{II} a/2) + G \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2B \cos(K_I a/2) = (G + C) \exp(-K_{II} a/2)$$

La segunda menos la cuarta

$$\begin{bmatrix} AK_I \cos(K_I a/2) + BK_I \sin(K_I a/2) \\ -AK_I \cos(K_I a/2) + BK_I \sin(K_I a/2) \end{bmatrix} = (G + C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2BK_I \sin(K_I a/2) = (G + C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

La segunda mas la cuarta

$$2AK_I \cos(K_I a/2) = -(G - C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

Queda entonces

$$2A \sin(K_I a/2) = (G - C) C \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2B \cos(K_I a/2) = (G + C) \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2BK_I \sin(K_I a/2) = (G + C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

$$2AK_I \cos(K_I a/2) = -(G - C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2)$$

Con esto es tentador hacer cocientes (si los coeficientes son tales que no dividimos por 0)

3/2	$K_I \tan(K_I a/2) = K_{II}$
4/1	$K_I \cot(K_I a/2) = -K_{II}$

De donde sumando

$$K_I \tan(K_I a/2) + K_I \cot(K_I a/2) = 0$$

$$K_I \tan(K_I a/2) + K_I \frac{1}{\tan(K_I a/2)} = 0 \Rightarrow$$

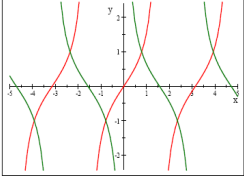
$$K_I \tan^2(K_I a/2) + K_I = 0 \Rightarrow$$

$$\tan^2(K_I a/2) = -1$$

Lo cual es imposible



tan(x)



Luego no se pueden satisfacer

$$\begin{aligned} 3/2 \quad K_I \tan(K_I a/2) &= K_{II} \\ 4/1 \quad K_I \cot(K_I a/2) &= -K_{II} \end{aligned}$$

juntas sino que lo hara una o la otra

Primer tipo par

$$K_I \tan(K_I a/2) = K_{II}$$

$A = 0$   $G - C = 0$

Anulo 4 y 1

$$\begin{aligned} 2A \sin(K_I a/2) &= (G - C) \exp(-K_{II} a/2) \\ 2B \cos(K_I a/2) &= (G + C) \exp(-K_{II} a/2) \\ 2BK_I \sin(K_I a/2) &= (G + C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2) \\ 2AK_I \cos(K_I a/2) &= -(G - C) K_{II} \exp(-K_{II} a/2) \end{aligned}$$

Segundo tipo impar

$$K_I \cot(K_I a/2) = -K_{II}$$

$B = 0$   $G + C = 0$

Que significa esto?

Repasando el calculo

Dada la solucion propuesta

$$\psi(x) = A \sin K_I x + B \cos K_I x$$

y para  $x < -a/2$

$$\psi(x) = C \exp(K_{II} x)$$

y para  $x > +a/2$

$$\psi(x) = G \exp(-K_{II} x)$$

Tendremos

$$A \sin(K_I a/2) + B \cos(K_I a/2) = G \exp(-K_{II} a/2)$$

Si tomamos  $A = 0$  y  $G = C$  queda

$$\begin{aligned} B \cos(K_I a/2) &= C \exp(-K_{II} a/2) \Rightarrow \\ C &= G = B \cos(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \end{aligned}$$

y queda entonces

$$\psi(x) = \begin{cases} B \cos(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(K_{II} x) & x < -a/2 \\ B \cos K_I x & -a/2 < x < a/2 \\ B \cos(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(-K_{II} x) & x > +a/2 \end{cases}$$

Esta es la solucion simetrica

del mismo modo para el otro tipo

$$\psi(x) \begin{cases} -A \sin(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(K_{II} x) & x < -a/2 \\ A \sin K_I x & \\ A \sin(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(-K_{II} x) & x > +a/2 \end{cases}$$

Que es la antisimétrica

Vemos que entonces, que como habíamos visto al ppo., las soluciones en el pozo son simétricas o antisimétricas

ojo

### Análisis de las soluciones del primer tipo

Tenemos  $\psi(x) = \begin{cases} B \cos(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(K_{II} x) & x < -a/2 \\ B \cos K_I x & \\ B \cos(K_I a/2) \exp(K_{II} a/2) \exp(-K_{II} x) & x > +a/2 \end{cases}$

con

$$K_I \tan(K_I a/2) = K_{II}$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad K_I = \sqrt{2mE}/\hbar$$

$$\frac{a}{2} (\sqrt{2mE}/\hbar) \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}/\hbar} a\right) = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

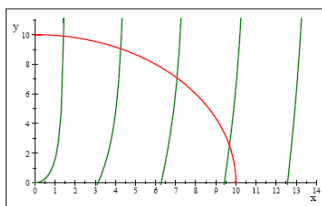
$$\sqrt{\frac{mEa^2}{2\hbar^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{mEa^2}{2\hbar^2}}\right) = \sqrt{\frac{m(V_0 - E)a^2}{2\hbar^2}}$$

Con  $\epsilon = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2}$

$$\epsilon \tan(\epsilon) = \sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$$

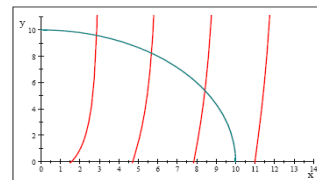
$$\epsilon \tan(\epsilon) = \sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$$

Es algo así como

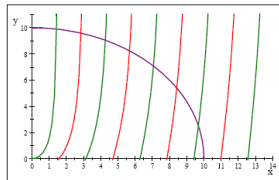


Para las soluciones del segundo tipo tenemos

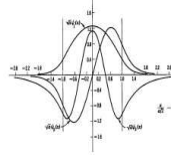
$$-\epsilon \cot(\epsilon) = \sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$$



juntando ambos  
 $\sqrt{100 - x^2}$



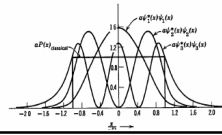
Vemos como aparecen las soluciones intercaladas.



La solución de energía más baja es sin nodos, o sea con la curvatura mínima

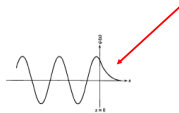
Y es par

Las otras son entonces



**Más incerteza**

Al fijar el tamaño de la "caja" ( $a$ ) estoy fijando  $\Delta p$   
 Puedo observar la partícula en la zona prohibida?



Para hacerlo tengo que medir!!!!!!  
 pero

$$\Delta x \sim \frac{1}{K_H} = \left( \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \right)^{-1}$$

entonces

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \sqrt{2m(V_0 - E)} \Rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim V_0 - E$$

### Un caso interesante

Sea la barrera

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x < 0; a < x \end{cases}$$

Suponemos que hay un flujo de partículas desde la izquierda.

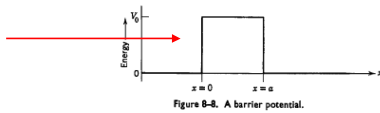


Figure 6-8. A barrier potential.

Sea el problema

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < l \\ 0 & l < x \end{cases}$$



Sean :

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$



Si se plantean las Ecuaciones mas generales

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_I(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + A_1' e^{-ik_1 x} \\ \Phi_{II}(x) &= A_2 e^{ik_2 x} + A_2' e^{-ik_2 x} \\ \Phi_{III}(x) &= A_3 e^{ik_1 x} + A_3' e^{-ik_1 x} \end{aligned} \right.$$

Con la condición usual de no flujo desde la derecha

$$A_3' = 0.$$

Por continuidad entre II y III en  $l$

$$A_2 e^{ik_2 l} + A_2' e^{-ik_2 l} = A_3 e^{ik_1 l}$$

Para las derivadas en  $l$

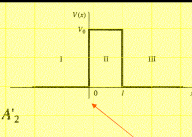
$$ik_2 A_2 e^{ik_2 l} - ik_2 A_2' e^{-ik_2 l} = ik_1 A_3 e^{ik_1 l}$$

Resulta entonces que

$$\left\{ \begin{aligned} A_2 &= \left[ \frac{k_2 + k_1}{2k_2} e^{i(k_1 - k_2)l} \right] A_3 \\ A_2' &= \left[ \frac{k_2 - k_1}{2k_2} e^{i(k_1 + k_2)l} \right] A_3 \end{aligned} \right.$$

Empalmado en  $x=0$

$$\phi_I(0) = \phi_{II}(0) \Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$$

$$\phi_I'(0) = \phi_{II}'(0) \Rightarrow ik_1 A_1 - ik_1 A_1' = ik_2 A_2 - ik_2 A_2'$$


Resultando

$$A_1 = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} A_2 + \frac{k_1 - k_2}{2k_1} A_2'$$

Reemplazando  $A_2$  y  $A_2'$  en términos de  $A_3$

$$A_1 = \left[ \frac{(k_1 + k_2)^2}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 - k_2)l} - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 + k_2)l} \right] A_3$$

$$= \left[ \frac{(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2} \cos(k_2 l) - i \frac{(k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2} \sin(k_2 l) \right] e^{ik_1 l} A_3$$

$$= \left[ \cos(k_2 l) - i \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin(k_2 l) \right] e^{ik_1 l} A_3$$

Para  $A_1'$

$$A_1' = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} A_2 + \frac{k_1 + k_2}{2k_1} A_2' = \left[ \frac{(k_1 + k_2)(k_1 - k_2)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 - k_2)l} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_1)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 + k_2)l} \right] A_3$$

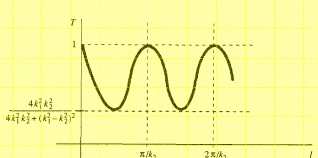
$$= \left[ \frac{2k_1^2 - k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)}{4k_1 k_2} \cos(k_2 l) + i \frac{(k_2^2 - k_1^2) - (k_1^2 - k_2^2)}{4k_1 k_2} \sin(k_2 l) \right] A_3 = i \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1 k_2} \sin(k_2 l) e^{ik_1 l} A_3$$

Sea el coeficiente de reflexión

$$R = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2$$

$$R = \frac{\left[ \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1 k_2} \sin(k_2 l) \right]^2}{\cos^2(k_2 l) + \left[ \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin(k_2 l) \right]^2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2(k_2 l)}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 l)}$$

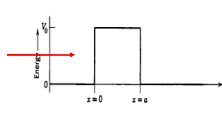
Para la transmisión

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{1}{\cos^2(k_2 l) + \left( \frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \sin^2(k_2 l)} = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 l)}$$


Sea ahora  $E > V_0$

Proponemos soluciones apropiadas donde el potencial vale 0

La forma de la función de onda es



$$\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$$

$$\psi(x) = A \exp(iKx) + B \exp(-iKx)$$

Si  $B = 0$

$$= A \exp(iKx) \exp(-iEt/\hbar)$$

Entonces

$$\Psi(x, t) = A \exp i(Kx - Et/\hbar)$$

Si estudiamos que

$$Kx - Et/\hbar = cte \Rightarrow$$

Se mueve a la derecha  $\frac{dx}{dt} = \frac{E}{\hbar K} > 0$

Con esto se puede calcular

$$P(x,t) = \Psi^* \Psi = A^* A$$

$$S(x,t) = -i \frac{\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial x} \Psi^*) = \frac{\hbar K}{2m} A^* A$$

Dado lo anterior

Para  $x < 0$

$$\psi = Ae^{iK_1x} + Be^{-iK_1x}$$

Con

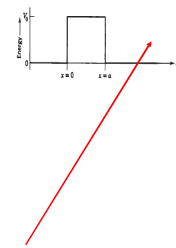
$$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$Ae^{iK_1x}$  es una onda que "avanza" a la derecha

Para  $x > a$

Propondríamos en ppo.

$$\psi = Ce^{iK_1x} + De^{-iK_1x}$$



Si las partículas "vienen" de la izquierda no hay razón para tener partículas viniedo de la derecha

$$D = 0$$

Proponemos soluciones para la zona clasicamente prohibida

$$\psi = F \exp(-K_2x) + G \exp(K_2x)$$

$$K_2 = \left[ \sqrt{2m(V_0 - E)} \right] / \hbar$$

Pero en este caso...

Se hace el procedimieto usual

Es interesante ver que pasa con el siguiente cociente

Para que la corriente de probabilidad sea distinta de 0 se necesita F y G

$$T = \frac{v_1 C^* C}{v_1 A^* A}$$

Flujo saliente por la derecha  
Flujo entrante

Es decir el cociente entre el flujo de probabilidad transmitido respecto del incidente sobre la barrera.

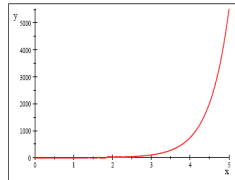
Resulta que

$$T = \frac{1}{[1 + \mathcal{D}]}$$

con

$$\mathcal{D} = \frac{\sinh^2 K_2 a}{\left(\frac{4E}{V_0}\right) \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$



Entonces crece muy rapido y entonces  $T$  se puede aproximar para  $x$  grande

$$\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \approx \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$T = \frac{1}{[1 + D]} \approx \frac{1}{D}$$



$$T \approx 16 \left[ \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) \right] \exp(-2K_2 a)$$

Luego  $T$  decrece con  $a$  y con  $K_2 = \left[ \sqrt{2m(V_0 - E)} \right] / \hbar$  (cuanto mas ancho y mas alto menos penetracion)

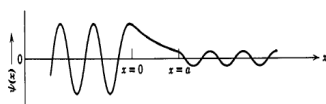
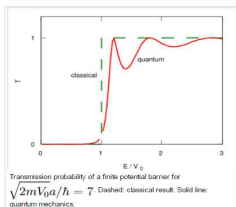


Figure 8-9. The real part of a barrier penetration eigenfunction.



Transmission probability of a finite potential barrier for  $\sqrt{2m}V_0a/\hbar = 7$ . Dashed: classical result. Solid line: quantum mechanics.

### Emision de particulas $\alpha$ por el nucleo atomico

Gamow, Condon y Gurney 1928

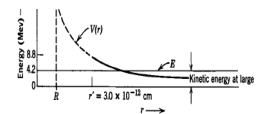


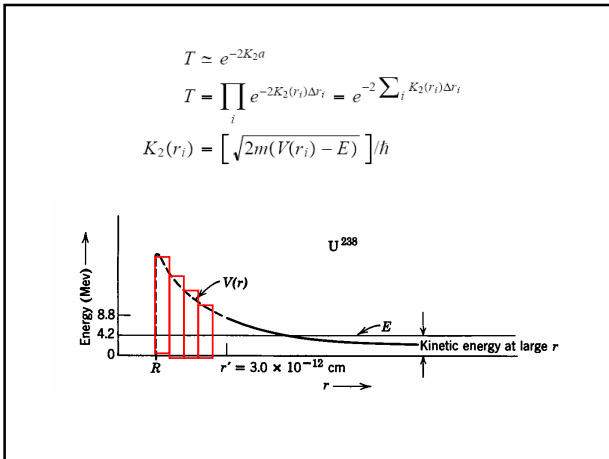
Figure 8-13. An energy diagram showing the relation between potential and total energies in alpha particle emission.

Cual sería la mínima Energía de una  $\alpha$ .  
Para un caso clásico ?

con

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} \text{ para } r > R$$

La solución que tenemos es para una barrera "cuadrada" se puede aproximar el potencial por una secuencia de barreras



Como vimos hay nucleos que emiten particulas  $\alpha$   
 Las energias de emision son del orden de  $4 - 9 MeV$

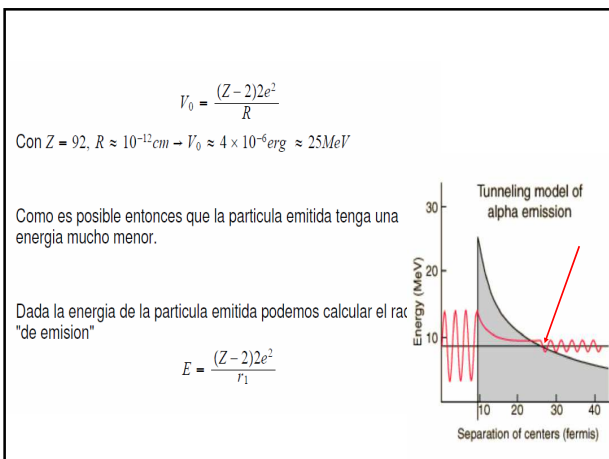
El potencial que siente la particula  $\alpha$  es una combinacion de la interaccion fuerte nuclear y el potencial de Coulomb.

Se mide  $R$  desde el centro del nucleo

Fuera de la parte nuclear el potencial es (en cgs)

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(Z-2)e \cdot 2e}{r}$$

La altura maxima de la barrera es en  $R$



De donde

$$r_1 = \frac{V_0}{E} R$$

$$V(r) = \frac{R}{r} V_0$$

Aproximamos el coeficiente de transmision por

$$T \approx \exp[-2(2m(V-E)^{1/2})/\hbar]$$

Reemplazamos la suma por la integral para el  $T$  total

$$T \approx \exp\left[-2 \int (2m(V(r)-E)^{1/2}) dr\right]$$



Expresando todo en terminos de  $r$

$$T \approx \exp \left[ -2 \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int \left( \frac{r_1}{r} - 1 \right)^{1/2} dr \right]$$

$$\int \left( \frac{r_1}{r} - 1 \right)^{1/2} dr = r_1 \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{R}{r_1} \right)^{1/2} - \left( \frac{R}{r_1} \right)^{1/2} \left( 1 - \left( \frac{R}{r_1} \right)^{1/2} \right) \right]$$

Si  $R \ll r_1$

$$\int \left( \frac{r_1}{r} - 1 \right)^{1/2} dr \approx r_1 \left[ \frac{\pi}{2} - 2 \left( \frac{R}{r_1} \right)^{1/2} \right] = \left[ \frac{\pi}{2} \frac{V_0}{E} R - 2 \left( \frac{V_0}{E} \right)^{1/2} R \right]$$

Finalmente

$$T \approx \exp \left[ -\frac{\pi \sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \frac{V_0 R}{E^{1/2}} + \frac{4 \sqrt{4m V_0}}{\hbar} R \right]$$

con

$$T(E) \approx A \exp \left( \frac{-C}{E^{1/2}} \right)$$

$$C = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\hbar} \cdot 2(Z-2)e^2$$

La constante de desintegracon  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{2R} T$$

$\frac{\lambda_1}{2R}$  = numero de colisiones por unidad de tiempo

Entonces para

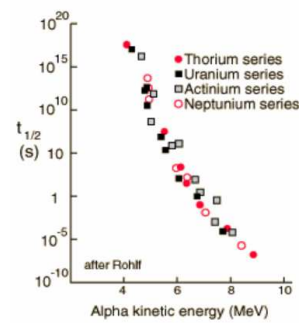
$$Z - 2 = 90$$

$$m = 6.6 \times 10^{-24} \text{ gr}$$

$$C \approx 360 \text{ MeV}^{1/2}$$

se comprueba con

$$\log_{10} \gamma = cte - \frac{156}{E_{\text{MeV}}^{1/2}}$$



$$e^{-\gamma T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Tiempo necesario para que la cantidad de núcleos sin desintegrar disminuya en un factor 2

$$\beta^- \Rightarrow n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ \Rightarrow \text{energía} + p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

**URANIUM 238 (U238) RADIOACTIVE DECAY**

type of radiation	nuclide	half-life
α	uranium-238	4.47 billion years
β	thorium-234	24.1 days
β	protactinium-234m	1.17 minutes
α	uranium-234	245000 years
α	thorium-230	8000 years
α	radium-226	1600 years
α	radon-222	3.823 days
α	polonium-218	3.05 minutes
β	lead-214	26.8 minutes
β	bismuth-214	19.7 minutes
β	polonium-214	0.000164 seconds
α	lead-210	22.3 years
β	bismuth-210	5.01 days
α	polonium-210	138.4 days
α	lead-206	stable

**Beta minus Decay**  
 Carbon-14 (6 protons, 8 neutrons) → Nitrogen-14 (7 protons, 7 neutrons) + Antineutrino + Electron

**Beta plus Decay**  
 Carbon-10 (6 protons, 4 neutrons) → Boron-10 (5 protons, 5 neutrons) + Neutrino + Positron

T es entonces la probabilidad de transición por "intento", si consideramos que una partícula α está rebotando dentro del pozo de potencial

Si la partícula se mueve con velocidad v  
 El pozo tiene diámetro 2R  
 El número de choques por unidad de tiempo es

$$N = \frac{v}{2R}$$

Entonces la probabilidad de emisión de α por segundo es

$$\lambda = T \frac{v}{2R} = T \frac{(\sqrt{2E/m})}{2R}$$

Con E la energía de la α emitida

Que pasa fuera de la barrera

Se debe satisfacer la conservación de la probabilidad ⇒ el flujo entrate debe ser igual al saliente

$$v(AA) - v(BB) = v(CC)$$

Que pasa en el "interior" de la barrera

Supongamos  
 $\psi_2 = B e^{ikx} + C e^{-ikx}$   
 $\psi'_2 = B i k e^{ikx} - C i k e^{-ikx}$

Las derivadas son  
 $\psi'_2 = B a e^{ikx} - C a e^{-ikx}$   
 $\psi'_2 = B a e^{ikx} - C a e^{-ikx}$

La corriente de probabilidad es  
 $S = -\frac{\hbar}{2m} [\psi^* \psi'_2 - \psi_2 \psi'^*]$

Resulta que para este caso vale  
 $S = -\frac{\hbar}{2m} [B_1 C_1 - B_1 C_1]$

Luego deben ser ≠ 0 y además  
 $B_1 = B_0 e^{i\phi}$   
 $C_1 = C_0 e^{i\phi} \Rightarrow [B_1 C_1 - B_1 C_1] = 2i B_0 C_0 \sin(\gamma - \beta)$

Supongamos

$$\psi_2 = B e^{ax} + C e^{-ax}$$

$$\psi_2' = B a e^{ax} - C a e^{-ax}$$

$$\psi_2'' = B a^2 e^{ax} - C a^2 e^{-ax}$$

$$\psi_2''' = B a^3 e^{ax} - C a^3 e^{-ax}$$

La corriente de probabilidad es

$$S = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi_2' \psi_2'' - \psi_2 \psi_2''']$$

Resulta que para este caso vale (hay flujo de proba)

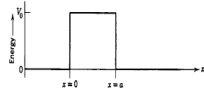
$$S = -\frac{i\hbar}{2m} [B_i C_i - B_i C_i] \quad \text{para que se cumpla deben ser complejas}$$

Luego deben ser  $\neq 0$  y además

$$B_i = B_0 e^{i\beta}$$

$$C_i = C_0 e^{i\gamma}$$

$$[B_i C_i - B_i C_i] = 2i B_0 C_0 \sin(\gamma - \beta)$$



### Diagramas cualitativos para pozos arbitrarios

a) para un potencial simetrico las funciones de onda son simetricas o antisimetricas

b) El estado fundamental tiene  $E > 0$

c) el estado fundamental tiene la menor energia  $\Rightarrow$

$$p^2 \propto E - V(x)$$

Debe ser lo mas chico posible

Sabemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi(x)$$

Entonces, es la de menor curvatura

Como son las amplitudes?

d)  $\lambda/2 >$  ancho del pozo

