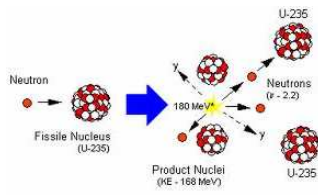


?



Singlete y Triplete

Sea la funcion de onda "de partida"

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2) = \psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2)\sigma_{m_{1z}}(1)\sigma_{m_{2z}}(2)$$

Las funciones de onda de spin posibles son

$$\begin{matrix} \sigma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} & \sigma_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} & \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}} & \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \end{matrix}$$

Se pueden construir las siguientes combinaciones

Antisimetrica:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} - \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}})$$

singlete

Simetrica

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} + \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}}) \\ \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \end{matrix} \right.$$

triplete

Pero si estamos lidiando con fermiones

la antisimetrica de spin debe ser multiplicada por una simetrica de "coordenadas"

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} + \psi_{ba})$$

Mientras que las triplete deben ser multiplicadas por antisimetricas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} - \psi_{ba})$$

Resulta entonces que las funciones de onda aceptables para dos particulas fermionicas no interactuantes resultan ser

$$\psi \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} + \psi_{ba}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} - \psi_{ba})\sigma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} - \psi_{ba}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} + \sigma_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{ab} - \psi_{ba})\sigma_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \end{array} \right.$$

Para interpretar esto correctamente es apropiado calcular el momento angular de spin total del sistema

$$S' = S_1 + S_2$$

podemos aceptar que como se trata de 2 momentos angulares vale

$$S' = \sqrt{s'(s'+1)} \hbar$$

$$S'_z = m'_s \hbar$$

$$m'_s = -s', \dots, +s'$$

$$s' = 0, 1$$

O sea que

TABLE (12-1)
Quantum Numbers for the Singlet and Triplet States

| Spin eigenfunction | Designation | s' | m'_s |
|---|-------------|------|--------|
| $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - \sigma_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}})$ | singlet | 0 | 0 |
| $\sigma_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ | triplet | 1 | +1 |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \sigma_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}})$ | triplet | 1 | 0 |
| $\sigma_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ | triplet | 1 | -1 |

Un poco mas de Fermiones

El nucleo

No se conoce el potencial de interaccion

solo se sabe que:

Aproximacion de gas de Fermi para estudiar un nucleo

Aproximacion de gas de Fermi para estudiar un nucleo

Haremos la aproximacion de particulas independientes
Para cada particula

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi \right) = E\Psi$$

Condiciones de contorno de Dirichlet

$$\Psi(x,y,z) = 0, \text{ en toda la frontera}$$

Se puede escribir

$$\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Con

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial i^2} \Psi_i(i) = E_i \Psi_i(i)$$

donde $\Psi_i(i) = X(x), Y(y), \dots$

Para la energia

$$E = E_x + E_y + E_z$$

Supongamos un cubo de lado a

Las condiciones de contorno son: $X(x) = 0$ para

$$\left[x \leq -\frac{a}{2} \right] \text{ y } \left[\frac{a}{2} \leq x \right]$$

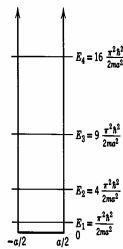
Resolviendo

$$E_x = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_x^2}{2ma^2}$$

con $n_x = 1, 2, 3 \dots$ (condiciones de contorno)

luego

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]$$



Calculamos entonces el numero de estados $N(E)dE$

Tenemos un grid 3dimensional y calculamos la cantidad de puntos entre dos cascaras esfericas entre r y $r + dr$

$$\text{Escribimos } E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} [r^2] \quad \left[r^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 \right] \quad \text{Remember rayleigh!}$$

Como n_i son positivos \Rightarrow octante \Rightarrow como la densidad de puntos es 1 (un punto por cubo de dimensiones $1 \times 1 \times 1$)

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

como $dE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} 2r dr$, entonces

$N(E)dE = \frac{m^{3/2}V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} E^{1/2} dE$

Si tomamos un nucleo (en esta aproximacion) podemos calcular el nivel de Fermi e_f

Tomemos en cuenta el spin unicamente

$N = 2 \int_0^{e_f} N(E)dE$

Ajustar e_f para tener N particulas

$$N = 2 \int_0^{e_f} \frac{m^{3/2}V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} E^{1/2} dE = 2^{1/2} \frac{m^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{e_f} E^{1/2} dE$$

$$= 2^{1/2} \frac{m^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3} \frac{2}{3} E_f^{3/2} = 2^{3/2} \frac{m^{3/2}V}{3\pi^2\hbar^3} E_f^{3/2}$$

de donde

$$E_f = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} 3^{2/3} \pi^{4/3} = \rho^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} 3^{2/3} \pi^{4/3}$$

Si lo aplicamos a un "nucleo"
 Pensamos en un sistema esferico de radio $R = r_0 A^{1/3}$
 $r_0 = 1.25 \cdot 10^{-13} \text{cm}$

Para un nucleo pesado ($N \approx 0.6A$) Para neutrones

Entonces $\rho = \frac{0.6A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{0.45}{\pi r_0^3}$ de donde $E_f \approx 34 \text{MeV}$

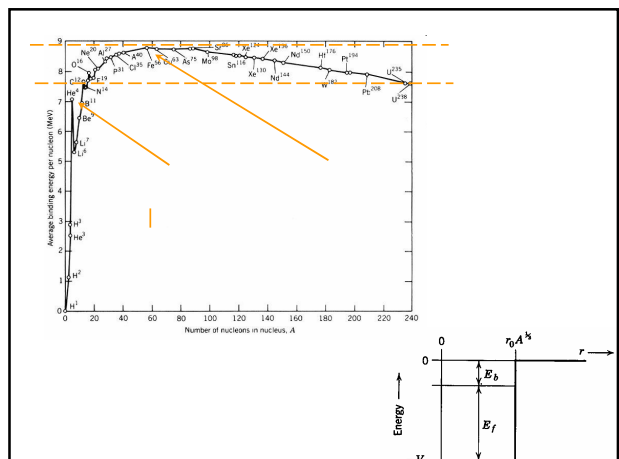
($1eV \approx 1000^\circ K$)

La energia de union media del ultimo neutron es $\approx 6 \text{MeV} = E_b \Rightarrow$

La profundidad del pozo es $E_f + E_b \approx 40 \text{MeV}$
 (en realidad es $\approx 50 \text{MeV}$)

Neutrons + Protons

Cuando se estudia la energia de union de los nucleos el comportamiento es :



PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS
http://www.ck12.org/periodic-table/

Respecto del termino de simetria

El nucleo esta compuesto por protones y neutrones
 Lo pensamos con 2 "gases" independientes
 Para cada uno de ellos tendremos un nivel de Fermi

$$E_{f_n} \propto \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}$$

$$E_{f_p} \propto \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3}$$

Faltaria ver como son los pozos para cada especie (efecto de Coulomb para protones)

Ademas Poblacion media estado p

Con

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_p - \nu) + 1}$$

De donde viene eso?

Gas cuántico aislado

$$\kappa = \sum_{i=1, N} \frac{p_i^2}{2m}$$

Tenemos que estudiar bosones, fermiones y **boltzmanniones**

Tenemos que calcular Γ

Los autovalores de la energia del sistema de N particulas es la suma de los posibles valores de energia de 1 particula (niveles)

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

(periodic boundary conditions)

donde $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}$; donde \vec{n} tiene componentes $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 un estado del sistema $\Rightarrow \langle n_{\vec{p}} \rangle$ conjunto de numeros de ocupacion que deben cumplir:

$$E = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \quad N = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}$$

Dejando de lado el spin
 bosones $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \dots$
 fermiones $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1$

boltzmann $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \dots$, pero $\langle n_{\vec{p}} \rangle \rightarrow \frac{\Omega}{\prod_{\vec{p}} (n_{\vec{p}}!)} \text{ por}$
 distinguibilidad, pero ademas hay que tener en cuenta el factor de buen conteo de Boltzmann.

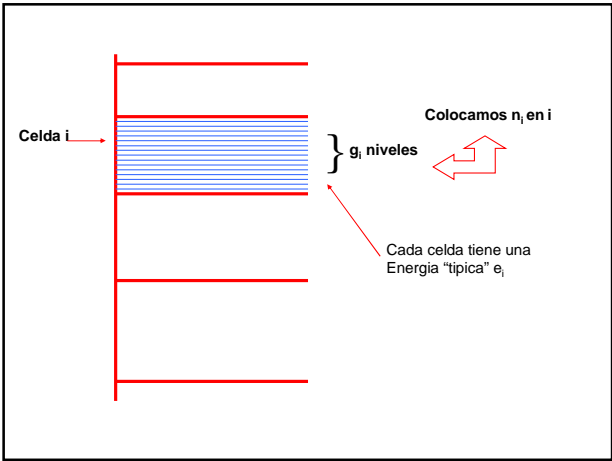
Remember Boltzmann

- i) Sea el espectro definido por $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$
- ii) Agrupamos niveles contiguos en celdas i
- iii) cada celda i tiene g_i niveles
- iii) cada celda i tiene asociado un ϵ_i
- iv) cada celda i tiene asignado un numero de ocupacion n_i

Dada una energia E

$$E = \sum_i \epsilon_i n_i \quad N = \sum_i n_i$$

Entonces sea $\Omega\langle n_i \rangle \rightarrow$ el numero de estados asociados a $\langle n_i \rangle$

$$\Gamma = \sum_{\langle n_i \rangle} \Omega\langle n_i \rangle$$


Bose

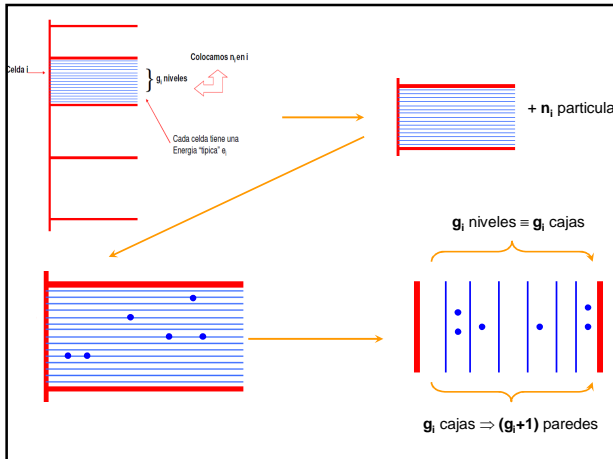
$\Omega\langle n_i \rangle = \prod_j \omega_j$, donde ω_j es el numero de formas de distribuir n_j en la celda j

Para bosones cada uno de los g_i niveles de la celda i puede tener cualesquiera numero de particulas. una celda esta definida por dos paredes las g_i subceldas donde se distribuyen n_i particulas requieren $(g_i - 1)$ paredes extra.

Entonces todas las posibles configuraciones seran las permutaciones de $n_i + (g_i - 1)$ elementos

$$\omega_i = \frac{[n_i + (g_i - 1)]!}{n_i!(g_i - 1)!}$$

$$\Omega_{bose}\langle n_i \rangle = \prod_i \omega_i = \prod_i \frac{[n_i + (g_i - 1)]!}{n_i!(g_i - 1)!}$$



g_i niveles = g_i cajas

De las (g_i+1) paredes 2 son fijas (las externas) luego quedan (g_i-1)

Entonces todos los posibles arreglos de las n_i partículas en los g_i niveles corresponde a todas las permutaciones de $[n_i + (g_i - 1)]$ elementos

$$\Omega\{n_i\} = \prod_j \omega_j$$

$$\omega_i = \frac{[n_i + (g_i - 1)]!}{n_i!(g_i - 1)!}$$

Fermi
como antes

$$\Omega\{n_i\} = \prod_j \omega_j$$

dado $n_i \Rightarrow n_i$ debe ser $\leq g_i$, si $n_i = g_i \Rightarrow \omega_i = 1$

Tengo que calcular todas las formas de seleccionar n_i niveles de g_i niveles \Rightarrow

$$\omega_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

de donde

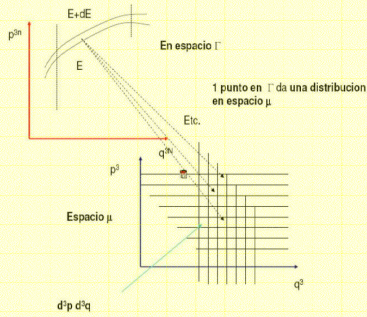
$$\Omega_{fermi}\{n_i\} = \prod_i \omega_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Boltzmann
Las partículas son distinguibles

- i) hay que distribuir las N partículas en las celdas, con n_i en la celda $i \Rightarrow N! / \prod (n_i!)$
- ii) las n_i se distribuyen en las g_i en $g_i^{n_i}$
- iii) aplicamos el factor de buen conteo de Boltzmann $(\frac{1}{N!})$ entonces

$$\Omega_{boltzmann}\{n_i\} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

Que hicimos para Boltzmann



Sea n_i el numero de puntos en la celda i
 Sea $\epsilon_i = p_i^2/2m$, la energia pp de la celda i (hipotesis dilucion)

$$\sum_{i=1,k} n_i = N$$

$$\sum_{i=1,k} n_i \epsilon_i = E$$

Un estado del sistema \rightarrow 1 punto en $\Gamma \rightarrow$ una nube en $\mu \rightarrow$ un conjunto de numeros de ocupacion $\{n_i\}$

Sea 1 punto en $\Gamma \rightarrow f_i = \frac{n_i}{\sigma}$ Para cada celda

Para todos los puntos del ensemble $\rightarrow f_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \sigma}$

Dado 1 punto en $\Gamma \rightarrow f_i$, dado $f_i \rightarrow$ muchos puntos en $\Gamma \rightarrow$ volumen en Γ

Buscaremos la f_i con mayor volumen \rightarrow la mas probable

Sea $\Omega\{n_i\}$ el volumen (Numeros auxiliares al final se ponen a 1)

$$\Omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} g_1^{n_1} \dots g_k^{n_k}$$

Este es el numero de puntos que tiene asociado el conjunto de numeros $\{n_i\}$

Hay que maximizar

$$\Omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} g_1^{n_1} \dots g_k^{n_k}$$

- i) es lo mismo maximizar el log
- ii) usamos Stirling ($\log n! = n_1(\log n_1 - 1)$)

$$\log \Omega\{n_i\} = N \log N - \sum n_i \log n_i + \sum n_i \log g_i + cte$$

Ahora se maximiza bajo la condicion del numero de particulas y energia \rightarrow multiplicadores de Lagrange

$$\delta \log \Omega\{n_i\} - \alpha \left(\sum n_i - N \right) - \beta \left(\sum n_i \epsilon_i - E \right) = 0$$

Y obteniamos

$$\delta \log \Omega(n_i) - \delta \left(\alpha \sum n_i + \beta \sum n_i \epsilon_i \right) = 0$$

Lo que se obtiene es

$$\sum_{i=1,k} [-(\log n_i + 1) + \log g_i - \alpha - \beta \epsilon_i] \delta n_i = 0$$

los δn_i son variaciones indep. Estos seran los \tilde{n}_i

De donde

$$\log \tilde{n}_i = -1 + \log g_i - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\tilde{n}_i = g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i - 1}$$

de donde

$$\tilde{f}_i = C \exp(-\beta \epsilon_i)$$

Para fermiones usando multiplicadores de Lagrange buscamos el termino dominante

Maximizamos $\Omega\{n_i\}$

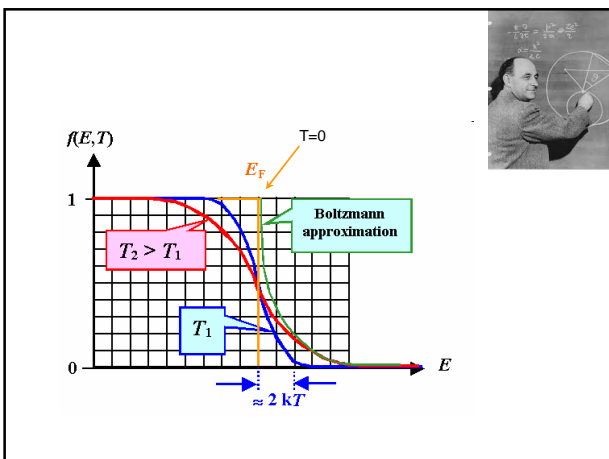
$$f(n_i) = \ln \Omega_F\{n_i\} + \alpha [N - \sum n_i] + \beta [E - \sum n_i \epsilon_i]$$

Se reemplaza Ω por la expresión antes obtenida se aplica Stirling se deriva Respecto de n_i se iguala a 0 y se obtiene

$$n_i = \frac{g_i}{[\exp(\beta \epsilon_i + \alpha) + 1]}$$

Finalmente se puede demostrar que

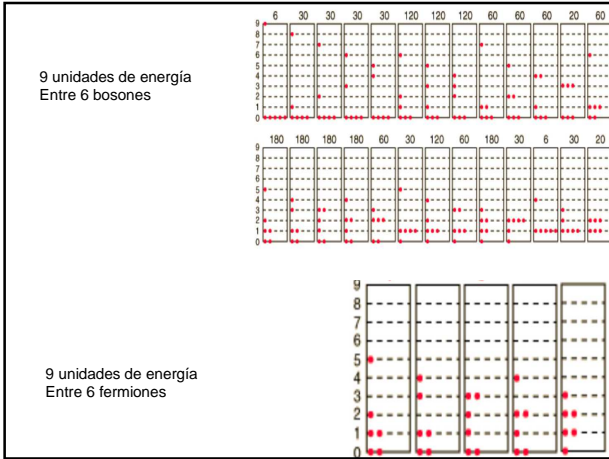
$$\bar{n}_i = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{[\exp(e_i - \mu) / kT] + 1}$$



Para Bosones se hace mas o menos lo mismo y se llega a

$$\bar{n}_i = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{[\exp(e_i - \mu) / kT] - 1}$$

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!



En el límite de Bajas temperaturas

$$U = \sum_p \varepsilon_p \langle n_p \rangle = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^\infty dp p^4 \langle n_p \rangle$$

a T=0

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_f$$

pp

$$\begin{cases} \bar{E} = \frac{3}{5} \varepsilon_f \\ E_t = \frac{3}{5} N \varepsilon_f \end{cases} \quad \begin{cases} E_f \propto \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} \\ E_f \propto \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \end{cases}$$

Si los pozos fuesen iguales \Rightarrow

$$E(Z,A) \propto A^{-2/3} [N^{5/3} + Z^{5/3}] \propto A^{-2/3} [N^{5/3} + (A-N)^{5/3}]$$

Sea un gas de fermi

El numero de estados entre p y p+dp es

$$2s+1 \cdot \frac{4\pi p^2 dp \cdot V}{h^3} = V \frac{p^2 dp}{\pi^2 h^3}$$

Si T=0

$$U = \frac{V}{2m\pi^2 h^3} \int_0^{p_f} p^4 dp = \frac{V p_f^5}{10m\pi^2 h^3}$$

$$N = \frac{V}{\pi^2 h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp = \frac{V p_f^3}{3\pi^2 h^3}$$

$$U = \frac{V p_f^5}{10m\pi^2 h^3} = \frac{1}{5} \frac{V p_f^3}{3\pi^2 h^3} \frac{p_f^2}{2m} = \frac{3}{5} N \frac{p_f^2}{2m} = \frac{3}{5} N \varepsilon_f$$

En el límite de Bajas temperaturas

$$U = \sum_p \varepsilon_p \langle n_p \rangle = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^\infty dp p^4 \langle n_p \rangle$$

a T=0

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_f$$

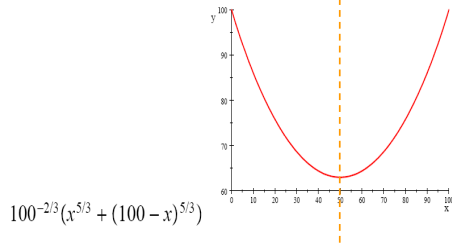
pp

$$\begin{cases} \bar{E} = \frac{3}{5} \varepsilon_f \\ E_t = \frac{3}{5} N \varepsilon_f \end{cases} \quad \begin{cases} E_f \propto \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} \\ E_f \propto \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \end{cases}$$

Si los pozos fuesen iguales \Rightarrow

$$E(Z,A) \propto A^{-2/3} [N^{5/3} + Z^{5/3}] \propto A^{-2/3} [N^{5/3} + (A-N)^{5/3}]$$

sea $A = 100$



Luego le gusta la simetría.
Luego podemos escribir el apartamiento del mínimo

$$f_4(Z, A) \propto E(Z, A) - E(Z, A)_{\min} = C' A^{-2/3} \left\{ N^{5/3} + Z^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right\}$$

Lo cual se puede reescribir como:

sea $(A=N+Z)$

$$D = \frac{N-Z}{2} = N - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} - Z$$

entonces

$$f_4(Z, A) \propto A^{-2/3} \left\{ \left[\frac{A}{2} + D \right]^{5/3} + \left[\frac{A}{2} - D \right]^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right\}$$

simetrico

$$Z = \frac{A}{2} - D$$

$$N = \frac{A}{2} + D$$

Para cada termino (D pequeño)

$$\left[\frac{A}{2} + D \right]^{5/3} \simeq \left[\frac{A}{2} \right]^{5/3} + \frac{5}{3} D \left[\frac{A}{2} \right]^{2/3} + \frac{5}{3} \frac{2}{3} \frac{D^2}{2} \left[\frac{A}{2} \right]^{-1/3}$$

$$\left[\frac{A}{2} - D \right]^{5/3} \simeq \left[\frac{A}{2} \right]^{5/3} - \frac{5}{3} D \left[\frac{A}{2} \right]^{2/3} + \frac{5}{3} \frac{2}{3} \frac{D^2}{2} \left[\frac{A}{2} \right]^{-1/3}$$

sumando

$$f_4(Z, A) \propto A^{-2/3} \left\{ 2 \left[\frac{A}{2} \right]^{5/3} + \frac{5}{3} \frac{2}{3} D^2 \left[\frac{A}{2} \right]^{-1/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right\}$$

$$f_4(Z, A) \propto A^{-1} \frac{5}{3} \frac{2}{3} D^2 \left[\frac{1}{2} \right]^{-1/3} \propto A^{-1} D^2 = \frac{(A/2 - Z)^2}{A}$$

Con $f_4(Z, A) \propto E(Z, A) - E(Z, A)_{\min}$

Sin embargo ademas hay problemas con las "profundidades parciales" (lo dejamos de lado en esta aproximación)

Porque f_4 ?

Modelo de la gota liquida

El modelo de la gota liquida

La formula SEMF (semi empirical mass formula)

Propiedades de la fuerza nuclear → saturacion

La masa de un nucleo esta dada por

$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_B}{c^2}$$

Donde

$$E_B = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A, Z)$$

a_1 Termino de Volumen

La fuerza nuclear fuerte afecta tanto a protones como a neutrones (son baryones)

PAra una fuerza de largo rango esperamos $A(A-1)/2$ pero como es de rango corto solo afecta a sus vecinos cercanos luego, depende solo de A

a_5 Termino de Superficie

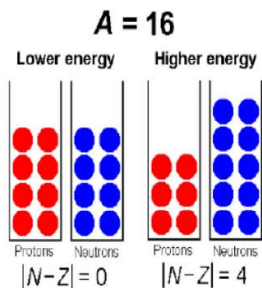
Igualmente depende de la fuerza fuerte.

a_c Termino de Coulomb

Para una esfera cargada uniformemente se obtiene $\propto Q^2/r$, pero para cargas discretas

a_4 Termino de Asimetria

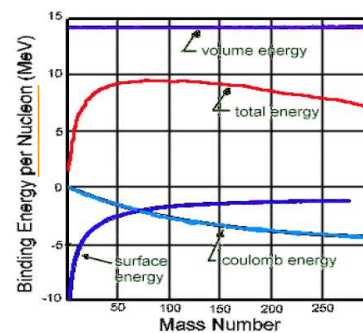
Este es de origen cuantico
protones y neutrones son Fermiones y como vimos antes....



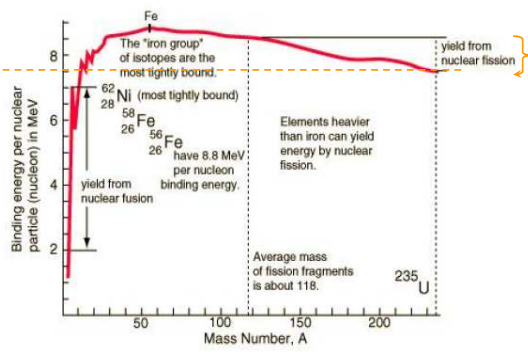
$\delta(A, Z)$ pairing term, captura el efecto del acoplamiento de spin

Binding energy : energia necesaria para "desarmar" al nucleo

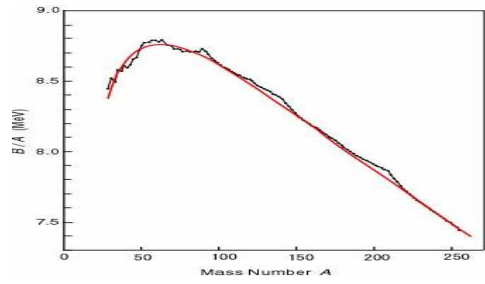
Se obtiene



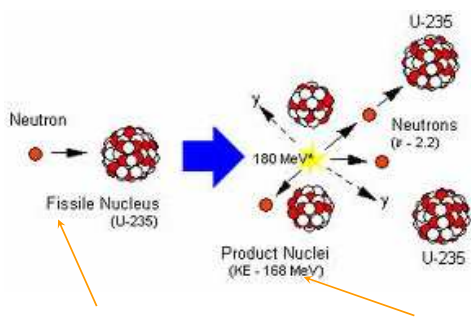
$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_B}{c^2}$$



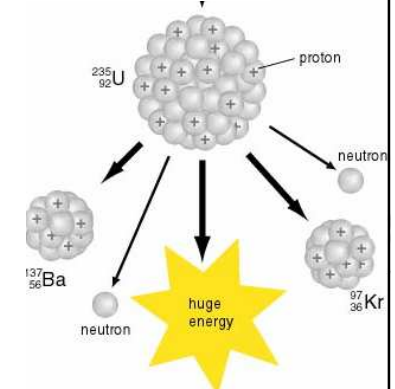
Comparación

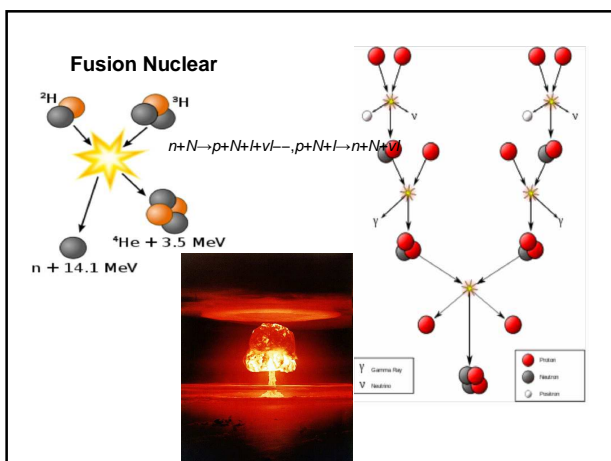
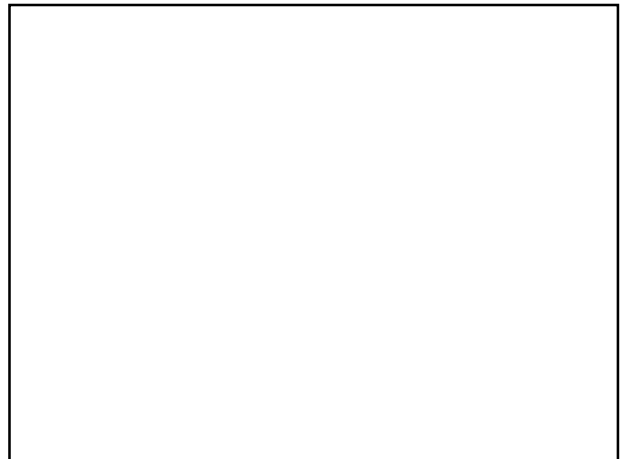
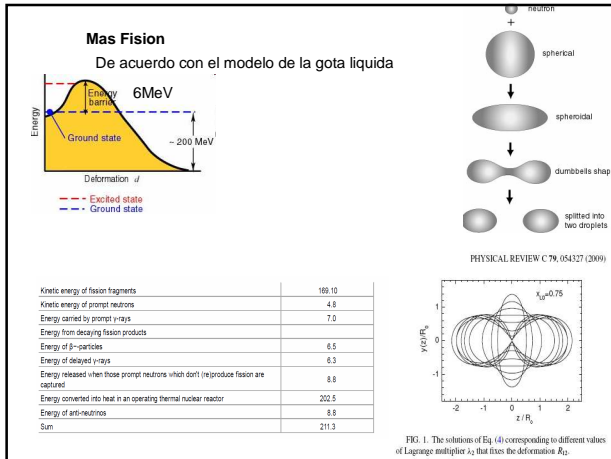


$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_B}{c^2}$$



$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_B}{c^2}$$





Modelo Nuclear mas simple

Neutrones y protones por separado

$$\begin{aligned}
 V(x) &= 0; & 0 < x < L & & V(x) &= \infty; & x \geq L \\
 V(y) &= 0; & 0 < y < L & & V(y) &= \infty; & y \geq L \\
 V(z) &= 0; & 0 < z < L & & V(z) &= \infty; & z \geq L
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$$

$$\psi = \varphi_x(x) \cdot \varphi_y(y) \cdot \varphi_z(z) \quad E = E_x + E_y + E_z$$

$$\varphi_x(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_x x}{L}\right) \quad E_x = \frac{(\hbar\pi)^2 n_x^2}{2ML^2}$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

$$E = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ML^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi = \varphi_x(x) \cdot \varphi_y(y) \cdot \varphi_z(z)$$

$$\varphi_x(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_x x}{L}\right) \quad \psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z)$$

$$E_x = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ML^2} n_x^2 \quad E_x = \frac{p_x^2}{2M} \rightarrow p_x = \frac{\hbar\pi}{L} n_x$$

$$p_x = \frac{\hbar\pi}{L} n_x \rightarrow p = \left(\frac{\hbar\pi}{L}\right) \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = p(n_x, n_y, n_z)$$

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \quad (p_x, p_y, p_z) = \frac{\hbar\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

$$dp^3 = \left(\frac{h}{L}\right)^3 = \left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^3$$

De incerteza de Heisenberg

Estados cuantificados de p

Suponiendo degeneracion o sea que todos los niveles estan llenos
Hasta el maximo (Fermi level E_f)

El numero N de estados de Momento
En la esfera hasta p_f

$$N = \left(\frac{1}{8}\right) \frac{4\pi p_f^3}{(2\pi\hbar)^3}$$

De la esfera $n_x, n_y, n_z > 0$

Protons

Neutrons

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \right)^{1/3} \left[\frac{Z}{V} \right]^{1/3}$$

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \right)^{1/3} \left[\frac{A-Z}{V} \right]^{1/3}$$

Sea $Z = N$

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \right)^{1/3} \left[\frac{A/2}{V} \right]^{1/3}$$

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \right)^{1/3} \left[\frac{A/2}{V} \right]^{1/3}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$R = R_0 A^{1/3}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A = 4.18 R_0^3 A$$

$$p_F = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{3\pi^2}{2 \cdot 4.18} \right)^{1/3}$$

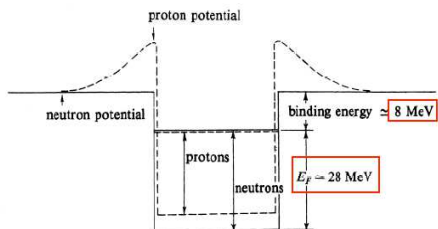


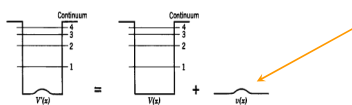
Figure 6-13 Potential well for neutrons and protons in a heavy nucleus, showing the Fermi level. Note the difference between neutron and proton wells.

Perturbaciones independientes del tiempo

Sea un potencial del tipo

$$V'(x) = V(x) + v(x)$$

tal que el potencial $V(x)$ es soluble y conocemos las correspondientes autofunciones



La ecuación que sabemos resolver es

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_i + V\psi_i = E_i\psi_i$$

y queremos resolver

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi'_n + V'\psi'_n = E'_n\psi'_n$$

Entonces desarrollamos las soluciones de la segunda en términos de las soluciones de la primera

$$\psi'_n = \sum_n a_{ni} \psi_i$$

Reemplazando V'

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi'_n + V\psi'_n + v\psi'_n = E'_n\psi'_n$$

y escribimos $\psi'_n = \sum a_{ni} \psi_i$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \sum a_{nl} \psi_l + V \sum a_{nl} \psi_l + v \sum a_{nl} \psi_l = \sum a_{nl} E'_n \psi_l$$

si agrupamos

$$\sum a_{nl} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_l + \sum a_{nl} V \psi_l + \sum a_{nl} v \psi_l = \sum a_{nl} E'_n \psi_l$$

$$\sum a_{nl} \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_l + V \psi_l \right] + \sum a_{nl} v \psi_l = \sum a_{nl} E'_n \psi_l$$

Como el primer termino es la ecuacion que sabemos resolver

$$\sum_l a_{nl} E_l \psi_l + \sum_l a_{nl} v \psi_l = \sum_l a_{nl} E'_n \psi_l$$

De donde

$$\sum_l a_{nl} E_l \psi_l - \sum_l a_{nl} E'_n \psi_l + \sum_l a_{nl} v \psi_l = 0$$

$$\sum_l a_{nl} (E_l - E'_n) \psi_l + \sum_l a_{nl} v \psi_l = 0$$

$$\sum_l a_{nl} (E'_n - E_l) \psi_l = \sum_l a_{nl} v \psi_l$$

Multipicamos con ψ_m^* e integramos

$$\sum_l a_{nl} (E'_n - E_l) \int \psi_m^* \psi_l dx = \sum_l a_{nl} \int \psi_m^* v \psi_l dx$$

Usando las propiedades de ortogonalidad de las autofunciones con V

$$\sum_l a_{nl} (E'_n - E_l) \delta_{ml} = \sum_l a_{nl} \int \psi_m^* v \psi_l dx$$

$$a_{nl} (E'_n - E_l) = \sum_l a_{nl} v_{ml}$$

Como suponemos que $v(x)$ es solo una perturbacion, entonces

a) las autofunciones deben diferir en poco (que es el corazon de la teoria de perturbaciones)

b) $v(x)$ es tal que v_{ml} es mucho menor que los autovalores de $V(x)$

Luego suponemos que

$$a_{nl} \begin{cases} \ll 1 & l \neq n \\ \approx 1 & l = n \end{cases}$$

Con estas dos

$$a_{nm}(E'_n - E_m) = \sum_l a_{nl} v_{ml} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{nm}(E'_n - E_m)}{E_m} = \sum_l a_{nl} \frac{v_{ml}}{E_m} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{nm}(E'_n - E_m)}{E_m} = a_{nm} \frac{v_{mm}}{E_m} \leftarrow \text{aproximamos}$$

Donde hemos usado que tanto a_{nl} y $\frac{v_{ml}}{E_m}$ son cantidades pequeñas

Queda entonces

$$a_{nm}(E'_n - E_m) = a_{nm} v_{mm}$$

Para el termino diagonal tenemos

$$a_{mm}(E'_n - E_n) = a_{mm} v_{mm} \Rightarrow$$

$$(E'_n - E_n) = v_{mm}$$

Para los no diagonales

$$a_{nm} = a_{nm} \frac{v_{mm}}{(E'_n - E_m)} \approx \frac{v_{mm}}{(E'_n - E_m)} \quad a_{jj} \approx 1$$

Como $(E'_n - E_n) = v_{mm} \Rightarrow E'_n = E_n + v_{mm} \Rightarrow$

$$a_{nm} = \frac{v_{nm}}{(E_n + v_{nm} - E_m)} = \frac{v_{nm}}{(E_n - E_m)} \frac{1}{(1 + v_{nm}/(E_n - E_m))} \Rightarrow$$

Desarrollamos en serie

$$a_{nm} = \frac{v_{nm}}{(E_n - E_m)} \left(1 - \frac{v_{nm}}{(E_n - E_m)} \right) \ll 1$$

Si suponemos que v_{nm} es menor que la "distancia" entre E_n y E_m aproximamos

$$a_{nm} \approx \frac{v_{nm}}{(E_n - E_m)}$$

Entonces

$$(E'_n - E_n) = v_{nm} = \int \psi_n^*(x) v(x) \psi_n(x) dx = \langle v(x) \rangle_n$$

O sea que la variacion de E_n esta dada por el promedio de $v(x)$ sobre $\psi_n(x)$ o $\Psi_n(x, t)$

Para los terminos no diagonales

$$a_{nm} \approx \frac{1}{(E_n - E_m)} \int \psi_n^*(x) v(x) \psi_m(x) dx$$

Si $E_n \gg E_m \dots$ Es un "peso"

O sea que esta asociado al "mixing de las autofunciones asociado a la perturbacion $v(x)$ pero como tiene un peso $\frac{1}{(E_n - E_m)}$ los muy alejados de m no aportaran mucho que digamos.

con esto tenemos la solución perturbativa

$$\psi'_m = \sum a_{nm} \psi_n$$

$$V(x) = \begin{cases} \delta \frac{|x|}{a/2}, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty, & x < -\frac{a}{2}, x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Seguendo a Eisberg se calcula para

Entonces

$$V'(x) = V_0(x) + v(x)$$

V_0 es el pozo cuadrado infinito

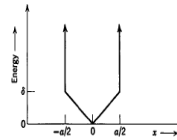


Figure 9-2. A V-bottom potential.

$$V(x) = \delta \frac{|x|}{a/2}$$

Conocemos el caso del potencial infinito con fondo "chato"

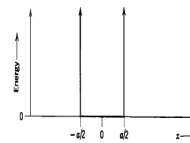


Figure 8-23. An infinite square well potential.

para el que el fundamental

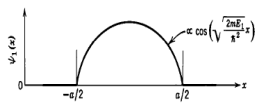


Figure 8-25. The first eigenfunction for an infinite square well potential.

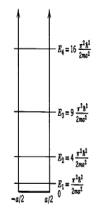


Figure 8-26. The first few eigenfunctions for an infinite square well potential.

Con las soluciones conocidas para este problema sin la perturbación

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) & m = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$E_m = \frac{\pi^2 \hbar^2 m^2}{2Ma^2}, \text{ con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Sea $\delta < E_1$

Los elementos no diagonales de $V(x)$ en terminos de la funciones de onda del pozo cuadrado

Entonces para a_{1m} tenemos $a_{mm} \approx \frac{1}{(E_n - E_m)} \int \psi_m^*(x) V(x) \psi_n(x) dx$

$$a_{mm} \approx \frac{1}{(E_n - E_m)} \int \psi_m^*(x) v(x) \psi_n(x) dx \Rightarrow$$

$$a_{mm} \approx \frac{1}{(E_n - E_m)} \frac{\delta}{a/2} \int \psi_m^*(x) |x| \psi_n(x) dx$$

Como estamos tomando el a_{1m} .

Como $|x|$ es par las ψ deben ser pares y por lo tanto solo quedan terminos de la forma

$$[\cos(m \cdot \pi \frac{x}{a})] \cdot |x| \cdot [\cos(1 \cdot \pi \frac{x}{a})]$$

Integrando da

$$a_{1m} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1} \frac{1}{(1 - m^2)} \left\{ \frac{\cos[(m+1)\frac{\pi}{2}] - 1}{2(m+1)^2} + \frac{\cos[(m-1)\frac{\pi}{2}] - 1}{2(m-1)^2} \right\}$$

$$m = 3, 5, 7, \dots$$

$$a_{13} = \frac{1}{32} \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1}$$

$$a_{15} = \frac{1}{864} \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1}$$

$$a_{17} = \frac{1}{1728} \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1}$$

$$a_{19} = \frac{1}{8000} \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1}$$

$$\frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{1}{54}$$

$$\frac{a_{19}}{a_{13}} = \frac{1}{250}$$

Usando que

$$\psi'_n = \sum a_m \psi_l$$

Entonces

$$\psi'_1(x) \approx a_{11} \psi_1(x) + \frac{1}{32} \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta}{E_1} \psi_3(x)$$

a_{11} por normalizacion

Finalmente

$$(E_1' - E_1) = \frac{4\delta}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} |x| \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$$(E_1' - E_1) = \frac{8\delta}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \right) = 0.297 \cdot \delta$$

