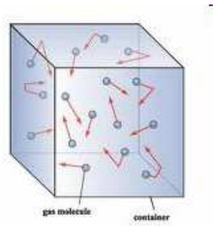
Cinetica 1



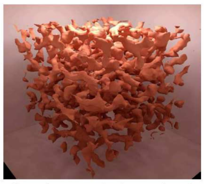
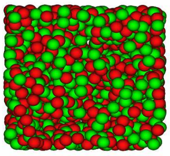
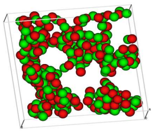
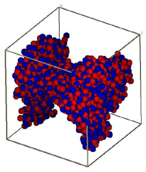


Fig. 4. Proton density iso-surface for a sample configuration of 100,000 nucleons at $\rho = 0.05$ fm^{-3}, $T = 1$ MeV and proton fraction 0.2. The simulation volume is about 120 fm on a side.







Definicion de probabilidad

Sea S el conjunto de los posibles resultados de un dado experimento.

Sea A un evento i.e. un subconjunto de elementos de S

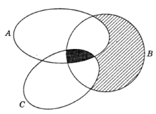
entonces probabilidad es :

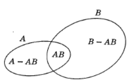
"Es la cuantificacion de nuestro nivel de expectacion de la ocurrencia de uno de los posibles resultados de un dado experimento" $\equiv P(A)$

Cuando el numero de experimentos $(N) \to \infty$

$$\boxed{P(A) \to \frac{n_A}{N} \rfloor_{N\to\infty}}$$

Sean los eventos A y B





$A \cup B \to$ todos los elementos que pertenecen a A , a B o a ambos

$A \cap B \to$ todos los elementos que pertenecen a A y a B

Dos eventos son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \varnothing$

$P(\varnothing) = 0 \Rightarrow$ algo pasa

$P(S) = 1$

$P(A \cap B) \Rightarrow$ ambos ocurren

$P(A \cup B) \Rightarrow$ alguno ocurre

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (conteo correcto)

Si son mutuamente excluyentes $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si son mutuamente excluyentes y exhaustivos

$$P(A) + P(B) + P(C) + \ldots = 1$$

A y B son independientes, con puntos en comun

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si no tienen puntos en comun (mutuamente excluyentes)

$$P(A \cap B) = 0$$

Probabilidad condicional

$P(B/A) \Rightarrow$ Probabilidad que ocurra A si ocurrio B

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(B/A) = P(A)P(A/B)$$

Muestras

Sea un conjunto de n elementos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Todo ordenamiento ("ordenado" es la palabra clave)

$$a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}, \ldots a_{jr}$$

Es una muestra ordenada de tamaño r

Para construir esto se pueden usar dos metodos

muestreo con reemplazo

en este caso siempre tengo n elementos de los cuales elegir

luego la cantidad de formas de hacerlo es

$$n \cdot n \cdot n \ldots = n^r$$

muestreo sin reemplazo

no puedo hacer ordenamientos de mas de r

para el primero tengo n, para el segundo $(n-1)$ ...

$$(n)_r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

(SIN REEMPLAZO)

Permutaciones

Son las formas de seleccionar “diversas cosas” de un conjunto (mas grande) donde el orden es importante.
Para k elementos distintos de n elementos tenemos

$$P = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaciones

Son las formas de seleccionar “diversas cosas” de un conjunto (mas grande) sin importar el orden
Para k elementos distintos de n elementos tenemos

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Subpoblaciones y particiones

Una poblacion de tamaño n denota un conjunto de n elementos sin importar su orden

Dos poblaciones son diferentes si contienen al menos un elemento diferente. Esta dado por

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esto se llama coeficiente binomial

Ejemplos

a) Sea una muestra aleatoria de tamaño r con reemplazo de una poblacion de n elementos.

Cual es la probabilidad de que no haya elementos repetidos en la muestra?

$$p = \frac{(n)_r}{n^r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{n^r}$$

b) si se colocan n bolas en n celdas, la probabilidad de que todas la celdas esten ocupadas es

$$p = \frac{n!}{n^n}$$

que es un numero muy pequeño

c) Se colocan r bolas en n celdas

Cual es la proba de que una celda dada tenga exactamente k bolas?

i) las k bolas pueden ser elegidas en $\binom{r}{k}$ formas

ii) las otras $(r-k)$ bolas se pueden colocar en las $(n-1)$ celdas restantes de $(n-1)^{(r-k)}$ formas (para cada bola puedo elegir entre $n-1$ celdas)

iii) el numero de ordenamientos totales es n^r (para cada bola puedo elegir entre n celdas)

entonces

$$p = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{(r-k)}}{n^r}$$

Funcion Distribucion

Variables estocastica → "resultado de un experimento"

Una variable estocastica X sobre un espacio muestral S es una funcion que mapea los elementos de S sobre un conjunto de numeros reales $\{x_i\}$

Ejemplo : Maximo cuando tiro 4 dados, etc.

Variables estocasticas discretas :

Sea X una variable estocastica en S, que puede tener los valores $X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

Sea $f(x_i)$, debe satisfacer

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_i f(x_i) = 1$ suma sobre todos los valores x_i de X

Si se conocen todos los valores de $f(x_i)$ tenemos toda la informacion posible. No es lo usual

Usualmente se conocen algunos momentos de la distribucion

$$\langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n f(x_i)$$

$\langle X \rangle$ es el valor medio

$\sigma_X = \left(\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \right)^{1/2}$ es la desviacion standard→ da idea del ancho.

Variable estocastica continua

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\int f(x)dx = 1$ suma sobre todos los valores x_i de X

$$\langle X^n \rangle = \int x^n f(x)dx$$

Distribucion Binomial

Sea una secuencia de N realizaciones independientes con dos posibles resultados $+1$o -1.

Sea p la probabilidad de $+1$ y q la de -1,

Entonces

$$\boxed{p + q = 1}$$

Si se hacen N realizaciones y entonces ocurren

$n \leftrightarrow 1$ y $m \leftrightarrow -1$

$n + m = N$ ← Total de realizaciones

La probabilidad de una dada **permutacion** es

$$p^n q^m$$

La probabilidad de una dada **combinacion** es de n salidas $+1$ y de m salidas -1.

$$\boxed{P_N(n) = \frac{N!}{n!m!} p^n q^m}$$

esto es la distribucion binomial, sumando sobre todo el espacio muestral:

Tenemos N realizaciones

con $\underbrace{\underbrace{aaaa\ldots a}_{n} \quad y \quad \underbrace{bbbb\ldots b}_{m}}_{n+m=N}$ elementos

El N! significa que

para el primer evento elijo entre N

para el segundo entre N-1

para el tercero entre N-2

Pero aparecen repetidos y debo eliminar estas repeticiones pues

aabbabbbaabbbbbbbabbbbb…. Es invariante ante

aabbabbbaabbbbbbbabbbbb….

O sea que pensamos que lo ponemos en "cajitas"

a	a	b	b	a	b	b	b	…

El primero es igual a

a	a	b	b	a	b	b	b	…

Que se obtiene del primero Permutando los dos a iniciales

El primero es distinto de

a	a	a	b	b	b	b	b	…

O sea que se obtiene haciendo

N!/(n!m!)

Vemos que

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1$$

(por teorema del binomio)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} P_N(n) n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{nN!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} P_N(n) = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N$$

$$\boxed{= pN}$$

del mismo modo

$$
\begin{aligned}
\langle n^2\rangle &= \sum_{n=0}^{N} P_N(n)n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \\
&= p\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n}\right)\right] \\
&= p\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\right] = p\frac{\partial}{\partial p}Np(p+q)^{N-1} \\
&= pN + p^2N(N-1) \\
&= pN + (Np)^2 - p^2N = (Np)^2 + Np(1-p) \\
&= \boxed{(Np)^2 + Npq}
\end{aligned}
$$

De donde

$$\sigma_N^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = (Np)^2 + Npq - (Np)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_N = \sqrt[2]{Npq}}$$

de donde

$$\frac{\sigma_N}{\langle n\rangle} = \sqrt[2]{Npq}\,\frac{1}{Np} = \sqrt[2]{\frac{q}{p}}\,\frac{1}{\sqrt[2]{N}}$$

desviacion fraccional

Es una medidad de la desviacion de la fraccion de $+1$ $(\frac{n}{N})$ respecto del valor esperado p

Si $\frac{\sigma_N}{\langle n\rangle}$ es cercano a 0 significa que $(\frac{n}{N})$ es cercano a p.

Distribucion normal

Sea la binomial bajo las siguientes condiciones

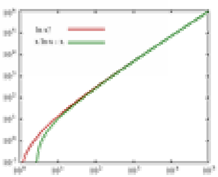
N es grande

pN es grande

entonces los factoriales se escriben (aprox. de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\ln(n!) = \ln\sqrt{2\pi n} + n\ln n - n$$



Entonces

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!m!}p^n q^m = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)} \qquad \#$$

stirling

$$= \frac{\sqrt{2\pi N}\,(\frac{N}{e})^N}{\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi(N-n)}\,(\frac{N-n}{e})^{(N-n)}}p^n(1-p)^{(N-n)} \qquad \#$$

$$\frac{\sqrt{N}N^N}{\sqrt{n}n^n\cdot\sqrt{(N-n)}(N-n)^{(N-n)}} = \frac{\sqrt{N}N^{(N-n)}N^n}{\sqrt{n}n^n\cdot\sqrt{(N-n)}(N-n)^{(N-n)}} =$$

$$\frac{N^{(N-n+1/2)}N^n}{\sqrt{n}n^n\cdot(N-n)^{(N-n+1/2)}} = \frac{N^n}{\sqrt{n}n^n\cdot(\frac{N-n}{N})^{(N-n+1/2)}}\frac{N^{1/2}}{N^{1/2}} =$$

$$\frac{N^{n+1/2}}{n^{n+1/2}\cdot(\frac{N-n}{N})^{(N-n+1/2)}N^{1/2}} = \frac{1}{\left[\frac{n}{N}\right]^{n+1/2}\cdot\left[\frac{N-n}{N}\right]^{(N-n+1/2)}N^{1/2}}$$

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!m!}p^n q^m = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)} \qquad \#$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi N}\,(\frac{N}{e})^N}{\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi(N-n)}\,(\frac{N-n}{e})^{(N-n)}}p^n(1-p)^{(N-n)} \qquad \#$$

$$\boxed{= p^n(1-p)^{(N-n)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\left(\frac{n}{N}\right)^{-n-1/2}\left(\frac{N-n}{N}\right)^{n-N-1/2}\right]} \qquad \#$$

Esto puede ser reescrito (exponencial de logaritmo)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[\begin{array}{c} -(n+½)\ln(\frac{n}{N}) - (N-n+½)\ln(\frac{N-n}{N}) \\ +n\ln p + (N-n)\ln(1-p) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[-n\ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N-n)\ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n\ln p + (N-n)\ln(1-p)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[-n\ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N-n)\ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n\ln p + (N-n)\ln(1-p)\right]$$

Derivando respecto de n

$$\frac{\partial}{\partial n}\exp[] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial n}\exp\left[-n\ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N-n)\ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n\ln p + (N-n)\ln(1-p\right.$$

$$= -\exp\left[-n\ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N-n)\ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n\ln p + (N-n)\ln(1-p)\right]$$

$$\cdot\left(\ln\frac{n}{N} - \ln(p) + (\ln(1-p)) + 1 - \ln\left(-\frac{1}{N}(n-N)\right) - 1\right)$$

Entonces

Con $n = Np$ obtenemos (el segundo factor)

$$= \left(\ln\frac{n}{N} - \ln(p) + (\ln(1-p)) + 1 - \ln\left(-\frac{1}{N}(n-N)\right) - 1\right)$$

$$= (\ln p - \ln p + (\ln(1-p)) + 1 - \ln(1-p) - 1) = 0$$

→ Esto tiene un maximo en $n = \langle N \rangle = Np$

Desarrollando en serie el exponente de la exponencial alrededor de $n = \langle n \rangle$

$$P_N(n) = P_N(\langle n\rangle)\exp\left[\frac{1}{2}B_2\underbrace{(n-\langle n\rangle)}_{\epsilon}{}^2 + \frac{1}{6}B_3(n-\langle n\rangle)^3 + \ldots\right]$$

$$P_N(n) = P_N(\langle n\rangle)\exp\left[\frac{1}{2}B_2\epsilon^2 + \frac{1}{6}B_3\epsilon^3 + \ldots\right]$$

$$\boxed{\text{Con } B_k = \left(\frac{d^k\ln\left[\sqrt{2\pi N}P_N(n)\right]}{dn^k}\right)_{n=\langle n\rangle}}$$

Calculando B_2 y B_3 se obtiene

$$B_2 = \frac{-1}{Npq}$$

$$B_3 = \frac{1}{N^2p^2q^2}(q^2 - p^2)$$

`[q=1-p]

Se ve que

$$\boxed{|B_k| < \frac{1}{(Npq)^{k-1}}}$$ (k>2)

si $\epsilon \ll Npq$ se pueden despreciar terminos de orden superior a ϵ^2

$$\boxed{P_N(n) \approx P_N(\langle n \rangle)\exp\left[-\frac{1}{2}|B_2|\epsilon^2\right]}$$

$P_N(\langle n \rangle)$ se determina por normalizacion

$$\boxed{P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt[2]{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]}$$

$$P_N(n) = \frac{1}{0.1}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n)^2}{0.01}\right]$$

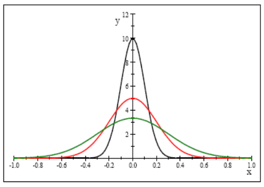


figura no normalizada

Distribucion de Poisson

Sea la Binomial

Sea $N \to \infty$

Sea $p \to 0$ de modo que $Np \to a \ll N$

Sea la region $n \sim Np \ll N$

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}$$

Usamos Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Entonces

i) $\frac{N!}{(N-n)!} \approx \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-n}} \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left(\frac{N-n}{e}\right)^{(N-n)}} \approx N^n$ $\quad n << N$

ii) $(1-p)^{(N-n)} \approx (1-p)^N = (1-p)^{a/p} \to e^{-a}$

Entonces

$$\boxed{P_N(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}}$$

La normalizacion de Poisson es $\sum_n \frac{a^n e^{-a}}{n!} = e^a e^{-a} = 1$

Solo depende de $\langle n \rangle = a$

Caminata al azar

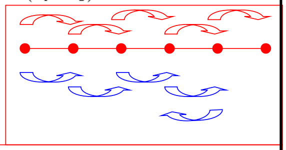
Sea el problema unidimensional de la caminata aleatoria
un "objeto" esta limitado a moverse sobre una linea

Se movera con pasos de tamaño fijo y tendra una probabilidad
$p = 1/2$ de moverse a la derecha
$(1-p) = q = 1/2$ de hacerlo a la izquierda.

Supongamos que da N pasos.
n_1 sera el numero de pasos asociados a p

$(N - n_1) = n_2$ los que dara a la izquierda.

El desplazamiento neto sera $m = (n_1 - n_2)$



Sea N grande
Entonces $-N \leq m \leq N$

Pero m estara dado por $m = N,\ N-2,\ N-4,$ etc.

Tomando en cuenta que $m = (n_1 - n_2) = (n_1 - N + n_1) \Rightarrow$

$n_1 = (m+N)/2$

Reemplazamos en

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n_1 - \langle n_1\rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

Obtenemos con
$\langle n_1\rangle = \langle m/2\rangle + N/2$
y
$\langle m\rangle = 0$ por simetria

$$(n_1 - \langle n_1\rangle)^2 = \left(\frac{m}{2} + \frac{N}{2} - \frac{N}{2}\right)^2$$

luego

$$(n_1 - \langle n_1\rangle)^2 = m^2/4$$

Ademas

$$\sigma_N^2 = Npq = \frac{1}{4}N$$

Entonces

$$P_N(m) = \left[\frac{2}{\pi N}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{m^2}{2N}\right]$$

Ahora lo pensamos en terminos del desplazamiento neto tomando en cuenta que cada paso es de longitud l

$$\boxed{x = ml}$$

Sea $\Delta x \gg l$

entonces la proba de que la particula este entre $x \to x + \Delta x$ luego de N pasos es

$$\boxed{P_N(x)\Delta x = P_N(m)(\Delta x/2l)}$$

pues las posiciones accesibles estan separadas $2l$

quedara entonces

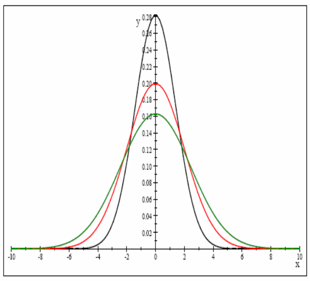
$$\boxed{P_N(x) = \left[\frac{1}{2\pi N l^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2N}\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]}$$

Si la particula da n pasos por unidad de tiempo, en t

$$P_N(x,t)\Delta x = \left[\frac{1}{2\pi n t l^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2nt}\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]\Delta x$$

Si $D = \frac{1}{2} n l^2$

$$\boxed{P_N(x,t)\Delta x = \left(\frac{1}{2(\pi D t)^{1/2}}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\Delta x}$$



Si calculamos $\langle x^2(t)\rangle$ obtenemos

$$\langle x^2(t)\rangle = 2\int x^2 \left(\frac{1}{2(\pi D t)^{1/2}}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2(\pi D t)^{1/2}}\right) \int x^2 \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2(\pi D t)^{1/2}}\right) \frac{1}{4}\sqrt{\pi (4Dt)^3} = \frac{1}{4}\,\frac{(\pi D t)^{1/2}}{2(\pi D t)^{1/2}}\, 2 \cdot 4 \cdot Dt$$

$$\boxed{= 2Dt = 2\frac{1}{2} n l^2 t = l^2 N(t)}$$

Donde hemos usado que Esta es una integral del tipo

$$I_n = \int_0^\infty x^n \exp(-\lambda x^2)\, dx$$

Que dan

n	$\mathbf{I}_n$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\lambda}$
1	$1/(2\lambda)$
2	$\frac{1}{4}\sqrt{\pi/\lambda^3}$
3	$1/(2\lambda^2)$
4	$\frac{3}{8}\sqrt{\pi/\lambda^5}$

En general

para n par $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\lambda x^2)\, dx = 2I_n$

para n impar $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\lambda x^2)\, dx = 0$

$$\boxed{\langle x^2(t)\rangle = l^2 N(t)}$$

Dos Teoremas

1) Teorema Central del limite

Dada una variable aleatoria X con densidad de probabilidad $f_X(x)$

Sea Y la variable correspondiente al promedio de N mediciones de X

$$y_N = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{N}$$

Entonces

$$f_Y(y_N - \langle X\rangle) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\exp\left[-N\frac{(y_N - \langle X\rangle)^2}{2\sigma^2}\right]$$

luego independiente de la forma de $f_X(x)$ dara una normal

si $f(x)$ tiene momentos finitos.

2) La ley de los grandes numeros

Sean N experimentos independientes

Entonces : Si un evento A tiene probabilidad p entonces la fraccion de eventos A se aproxima a p con $N \rightarrow \infty$

La condicion es que σ_X^2 sea finito.

Hypergeometric

Varían las probas individuales

Sea un proceso en el que se extraen *n* objetos sin reemplazo de una población de *N* con ***m*** "Rojas" y ***N-m*** "Negras"

El *éxito* es extraer ***k*** "rojas" en las muestras de ***n***

	Extraídas	No extraídas	Total
Rojas	k	m-k	m
Negras	n-k	N+k-n-m	N-m
Total	n	N-n	N

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$\binom{N}{n}$ es el numero total de configuraciones

$\binom{m}{k}$ es el numero de configuraciones con k negras

$\binom{N-m}{n-k}$ es el numero de formas de completar

Kinetic Theory

Presion de un gas

Hipotesis varias:

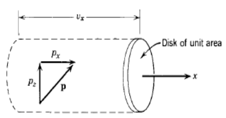
1) el gas esta formado por un numero muy grande N de particulas

2) las moleculas estan muy separadas y no ejercen fuerzas entre si , salvo en los raros eventos colisionales

3) No hay fuerzas externas y entonces hay simetrias

Por simetria el comportamiento segun x arbitrario es indiferenciable del comportamiento en y.

Supongamos colisiones elasticas con la pared



Sea $N\,f(v_x)\;dv_x$ el numero de moleculas copn velocidades entre v_x y $v_x + dv_x$

En un intervalo de tiempo dt, las particulas con v_x que chocan con la pared son las que se encuentran a una distancia $l = v_x\, dt$

Entonces el numero de particulas en un volumen de area A y longitud l es:

$$\boxed{N\frac{lA}{V} = nA\, v_x\, dt}$$

De las cuales las que tienen un velocidad v_x es

$$\boxed{nA\, v_x\, dt\, f(v_x)\, dv_x}$$

La variacion de momento asociada con el choque es $2p_x$

Entonces la fuerza ejercida es $\Delta p/\Delta t$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= nA\, v_x\, dt\, f(v_x)\, dv_x\, \frac{2mv_x}{dt} \\ &= nA\, f(v_x)\, dv_x\, 2mv_x^2 \end{aligned}}$$

Dividiendo por el area e integrando sobre todas las velocidades obtenemos la presion

$$\boxed{P = 2nm\int_0^{\infty} f(v_x)\, dv_x\, v_x^2 = \frac{1}{2}2nm\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x)\, dv_x\, v_x^2}$$

O sea

$$\boxed{P = nm\langle v_x^2\rangle}$$

Como $v^2 = \sum_1^3 v_i^2$, y por simetria $\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle$, entonces $\langle v^2\rangle = \sum_1^3\langle v_i^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle$, luego

$$\boxed{P = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle}$$

Pero como la energia cinetica media es

$$\boxed{\langle E_k\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle}$$

Entonces

$$P = \frac{2}{3}n\langle E_k\rangle = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\langle E_k\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{PV = \frac{2}{3}N\langle E_k\rangle = \frac{2}{3}NU}$$

Pero para el gas ideal sabemos que la EOS puede ser escrita

$$PV = \nu RT = \frac{N}{N_A}RT = NkT$$

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{2}{3}NU = NkT \Rightarrow \\ &U = \frac{3}{2}kT \end{aligned}}$$