Problemas para hacer en clase

Momento Angular Orbital

1. **Ecuaciones diferenciales del momento angular orbital**
   Los operadores de momento angular orbital se escriben:

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\\ \hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \hat{L}_\pm &= \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

2. Partiendo de $Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$, aplicar el operador $\hat{L}_\pm$ y encontrar alguna relación con:
   (a) $Y_2^2(\theta,\phi)$
   (b) $Y_2^0(\theta,\phi)$

3. **Propiedades de los Armónicos Esféricos**
   (a) Establecer las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}x &= -r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 - Y_1^{-1})\\ y &= ir\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 + Y_1^{-1})\\ z &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\end{aligned}$$

   (b) El operador paridad $\hat{\Pi}$ se define como

$$\hat{\Pi}f(r,\theta,\phi) = f(r,\pi-\theta,\pi+\theta)$$

   Calcular:
   i. $\hat{\Pi}Y_l^l$
   ii. $\hat{\Pi}Y_l^m$
   iii. $[Y_l^m]^*$
   iv. Calcular explícitamente
      A. $\hat{\Pi}Y_0^0$
      B. $\hat{\Pi}Y_1^1$
      C. $\hat{\Pi}Y_1^0$
      D. $\hat{\Pi}Y_1^{-1}$
      E. $\hat{\Pi}Y_2^2$
      F. $\hat{\Pi}Y_2^2$
      G. $\hat{\Pi}Y_2^0$
      H. $\hat{\Pi}Y_2^{-1}$
      I. $\hat{\Pi}Y_2^{-2}$

4. **Elementos de matriz del momento angular**
   De los siguientes elementos de matriz, expresar (utilizando principios de conservación) cuáles son los elementos nulos, y calcular el resto.

   (a) $\langle 00 \mid Y_2^0 \mid 10\rangle$
   (b) $\langle 10 \mid Y_2^0 \mid 10\rangle$
   (c) $\langle 11 \mid Y_2^1 \mid 21\rangle$
   (d) $\langle 00 \mid Y_1^1 \mid 11\rangle$
   (e) $\langle 00 \mid Y_1^1 \mid 1(-1)\rangle$
   (f) $\langle 00 \mid \Pi \mid 00\rangle$
   (g) $\langle 11 \mid \Pi \mid 11\rangle$
   (h) $\langle 00 \mid \Pi \mid 10\rangle$

Momento Angular Cuántico General

1. **Calculos básicos**
   Calcular las siguientes expresiones:

   (a) $[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$
   (b) $[\hat{J}_y, \hat{J}_z]$
   (c) $[\hat{J}_z, \hat{J}_y]$
   (d) $[\hat{J}^2, \hat{J}_x]$
   (e) $[\hat{J}^2, \hat{J}_y]$
   (f) $[\hat{J}^2, \hat{J}_z]$

2. **Operadores Escalera**
   Definimos $\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$. Calcular:

   (a) $[\hat{J}_z, \hat{J}_+]$
   (b) $[\hat{J}_z, \hat{J}_-]$
   (c) $[\hat{J}^2, \hat{J}_-]$
   (d) $[\hat{J}^2, \hat{J}_+]$
   (e) $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$

3. **Representaciones del momento angular**
   Sabiendo que los operadores escalera actúan (con la normalización correcta) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\langle Jm|\hat{J}_z|J'm'\rangle &= m'\hbar\delta_{J,J'}\delta_{m,m'} \\ \langle Jm|\hat{J}_\pm|J'm'\rangle &= m'\hbar\sqrt{J(J+1)-m'(m'\pm 1)}\delta_{J,J'}\delta_{m,m'\pm 1}\end{aligned}$$

   (a) Expresar las matrices $\hat{J}_z$ en la base de autofunciones del momento angular para:
      i. $J = 0$
      ii. $J = \frac{1}{2}$
      iii. $J = 1$
   (b) Expresar las matrices $\hat{J}_+$ en la base de autofunciones del momento angular para:

i. $J = 0$
ii. $J = \frac{1}{2}$
iii. $J = 1$

(c) Expresar las matrices $\hat{J}_-$ en la base de autofunciones del momento angular para:

i. $J = 0$
ii. $J = \frac{1}{2}$
iii. $J = 1$

(d) Expresar las matrices $\hat{J}_x$ en la base de autofunciones del momento angular para:

i. $J = 0$
ii. $J = \frac{1}{2}$
iii. $J = 1$

(e) Expresar las matrices $\hat{J}_y$ en la base de autofunciones del momento angular para:

i. $J = 0$
ii. $J = \frac{1}{2}$
iii. $J = 1$

(f) Expresar las matrices $\hat{J}^2$ en la base de autofunciones del momento angular para:

i. $J = 0$
ii. $J = \frac{1}{2}$
iii. $J = 1$

4. **Sumatoria de momentos angulares**
Demostrar que si $\hat{J}_1$ y $\hat{J}_2$ son dos momentos angulares, entonces la suma de ellos $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ también lo es.

Spin

1. **Matrices de Pauli**
Calcular:

(a) La traza de σ_x
(b) La traza de σ_y
(c) La traza de σ_z
(d) El determinante de σ_x
(e) El determinante de σ_y
(f) El determinante de σ_z
(g) $[\sigma_x, \sigma_y]$
(h) $[\sigma_y, \sigma_z]$
(i) $[\sigma_z, \sigma_x]$
(j) $\{\sigma_x, \sigma_y\}$
(k) $\{\sigma_y, \sigma_z\}$
(l) $\{\sigma_z, \sigma_x\}$

2. Encontrar los autovalores y autovectores de
   (a) $\hat{S}_x$
   (b) $\hat{S}_y$
   (c) $\hat{S}_z$
   (d) $\hat{S}^2$
3. Rotación de spinores
   (a) Calcular $(\hat{\sigma}_z)^n$
   (b) Usando los resultados anteriores, calcular $\hat{R}_\phi \equiv \exp(i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z)$
   (c) Mostrar que esta transformación es unitaria
   (d) Calcular el valor de $|\xi'\rangle = \hat{R}_\phi|\xi\rangle$, para $\phi = 2\pi$
   (e) Comprobar que $\exp(i\mathbf{e}\cdot\hat{\sigma}\phi) = (\cos\phi)\hat{1} + i(\sin\phi)\mathbf{e}\cdot\hat{\sigma}$