

Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 1 - Flujos unidimensionales.
1er cuatrimestre 2008

Problema 1: Dado el sistema $\dot{x} = A x$, donde $A \in \mathbb{R}^{N \times N} = cte$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Demostrar que $x(t) = A_0 e^{At}$ es solución del sistema.

Problema 2: Analice las siguientes ecuaciones gráficamente. En cada caso haga un dibujo del campo vector, encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de $x(t)$ para distintas condiciones iniciales. Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada.

(a) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(b) $\dot{x} = x - x^3$

(c) $\dot{x} = 1 + 0.5 \cos x$

(d) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (hint: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones.

No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)

(e) $\dot{x} = 1 - x^{14}$

(f) $\dot{x} = e^{-x} \sin x$

(g) $\dot{x} = 1 - 2 \cos x$

Problema 3: Conociendo una ecuación $\dot{x} = f(x)$ sabemos como graficar el flujo en el eje real. Ahora se les pide que inviertan el procedimiento y dadas las Fig 1, obtengan una ecuación diferencial consistente con cada una.

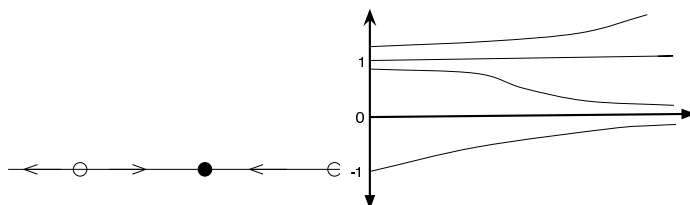
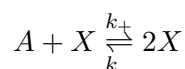


Figure 1: (izq.) Retrato de fases, (derecha) serie temporal

Problema 4: Resuelva la ecuación logística $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ para una condición inicial arbitraria N_0 . Hint: use un cambio de variables $x = 1/N$.

Problema 5: Considere la siguiente reacción química



donde una molécula de X se combina con una de A para formar dos de X. Esto significa que el compuesto X estimula su propia producción, un proceso llamado *autocatálisis*. Esta retroalimentación positiva eventualmente es limitada por la reacción reversa donde $2X$ se convierte en $A+X$.

- (a) Usando la ley de acción de masas escriba la ecuación diferencial que gobierna esta reacción.
- (b) Encuentre los puntos fijos y clasifique su estabilidad.
- (c) Realice un gráfico de $x(t)$ para varias condiciones iniciales X_0 .

Problema 6: El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN \ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

- (a) Interprete a y b biológicamente.
- (b) Dibuje el campo vector y luego grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

Problema 7: Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque $f'(x^*) = 0$, use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.

- (a) $\dot{x} = x(1 - x)$
- (b) $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$
- (c) $\dot{x} = \tan x$
- (d) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$
- (e) $\dot{x} = ax - x^3$, donde a puede ser positivo, cero, o negativo. Discuta todos los casos.
- (f) $\dot{x} = x^2(6 - x)$
- (g) $\dot{x} = \ln x$

Problema 8: Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores $\dot{N} = -aN \ln(bN)$.

Problema 9: En mecánica estadística existe el fenómeno de *critical slowing down*, una característica de una transición de fases de segundo orden. En la transición, el sistema se relaja a un equilibrio mucho más lento que lo usual. Acá hay una versión matemática del mismo efecto:

- (a) Obtenga una solución analítica para $\dot{x} = -x^3$ para una condición inicial arbitraria. Muestre que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, pero el decaimiento no es exponencial.
- (b) Para obtener una intuición sobre la “lentitud” del decaimiento, compare la evolución temporal de la solución anterior con la solución de $\dot{x} = -x$.

Problema 10: Una partícula viaja en $x \geq 0$ con una velocidad dada por $\dot{x} = -x^c$, donde c es real y constante.

- (a) Encuentre todos los valores de c tal que el origen $x = 0$ es un punto fijo estable.
- (b) Suponga que elige un c tal que el origen es estable. Puede la partícula llegar al origen

en un tiempo *finito*? Calcule en función de c , el tiempo que tarda la partícula viajar de $x = 1$ a $x = 0$.

Problema 11: Considere la ecuación $\dot{x} = rx + x^3$, para $r > 0$ fijo. Muestre que $x(t) \rightarrow \pm\infty$ en un tiempo finito, comenzando por cualquier condición inicial x_0 .

Problema 12: Muestre que el problema de valores iniciales $\dot{x} = x^{1/3}$, $x(0) = 0$ tiene un número infinito de soluciones. hint: construya una solución que se quede en $x = 0$ hasta un t_0 arbitrario, donde comienza a despegarse.

Problema 13: Para cada uno de los campos vectores siguientes, grafique el potencial $V(x)$ e identifique todos los equilibrios y su estabilidad. Recuerde que el potencial $V(x)$ se define como $\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}$.

(a) $\dot{x} = x(1 - x)$

(b) $\dot{x} = \sin x$

(c) $\dot{x} = 3$

(d) $\dot{x} = 2 + \sin x$

(e) $\dot{x} = -\sinh x$

(f) $\dot{x} = r + x - x^3$, para distintos valores de r .