

Dinámica no lineal

Guía N° 7 - Formas normales
1er cuatrimestre 2006

P 1: Determine la forma normal de los siguientes sistemas linearizados

$$i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1)$$

P 2: Determine la forma normal de un campo vector autónomo de tercer orden

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Muestre que en coordenadas cilíndricas se puede llevar la forma normal a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 r z + a_2 r^3 + a_3 r z^2 + O(4) \\ \dot{z} &= b_1 r^2 + b_2 z^2 + b_3 r^2 z + b_4 z^3 + O(4) \\ \dot{\theta} &= \omega + c_1 z + O(2) \end{aligned}$$

con $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$ constantes. Hint: agrupe las dos coordenadas de $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ en una sola coordenada compleja $w = x + iy$.

P 3: (Difícil) El oscilador de van der Pol promediado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \sigma y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \sigma x + y - y(x^2 + y^2) - \gamma \end{aligned}$$

(a) Calcule la bifurcación de saddle-node y obtenga:

$$\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^2}{27}(1 + 9\sigma^2) + \frac{\sigma^2}{27}(1 + \sigma^2)^2 = 0 \quad (3)$$

(b) Calcule la bifurcación de Hopf y obtenga:

$$8\gamma^2 = 4\sigma^2 + 1, \quad |\sigma| > 1/2 \quad (4)$$

- (c) Muestre que hay una bifurcación de Takens-Bogdanov en $(\sigma, \gamma) = (1/2, 1/2)$.
- (d) Realice los cambios de coordenadas necesarios para llevarlo a su forma normal.
- (e) Haga un diagrama de bifurcaciones mostrando ambas curvas y el punto de Takens-Bogdanov.
- (f) Diga si espera que falten más bifurcaciones.

P 4: (Difícil) El siguiente modelo describe la dinámica de un ecosistema simple de predador-presa:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx(\alpha + x)(1 - x) - cxy \\ \dot{y} &= -\alpha\delta y + (c - \delta)xy\end{aligned}$$

donde r, c, δ son parámetros positivos, α es el parámetro de control y $c > \delta$.

- El sistema posee un equilibrio no trivial que sufre una bifurcación de Hopf. Transforme coordenadas y lleve este punto fijo al origen. Verifique la condición de transversalidad en el punto de bifurcación.
- Muestre un posible cambio no lineal de coordenadas que elimine todos los terminos no resonantes.
- Verifique la condición de no degeneración. Determine si la bifurcación de Hopf es subcrítica o supercrítica.
- Realice un retrato de fases del sistema integrando numericamente las ecuaciones antes y despues de la bifurcación.

P 5: Sea $X(x)$ un campo vector suave que satisface $\text{Tr } DX(0) = \text{Det } DX(0) = 0$, $DX(0) \neq 0$. Demostrar que la forma normal de X viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^N \begin{pmatrix} a_r y_1^r \\ b_r y_1^r \end{pmatrix} + O(|\mathbf{y}|^{N+1}) \quad (5)$$

P 6: Dada $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, calcular $L_A \begin{pmatrix} x^m \\ 0 \end{pmatrix}$ y $L_A \begin{pmatrix} 0 \\ x^m \end{pmatrix}$, con $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$. Obtenga la representación matricial de L_A respecto de la base

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (6)$$

Muestre que los autovalores de L_A están dados por $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 - \lambda_i$, $i = 1, 2$, con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $m_1 + m_2 = r = 2$.

P 7: Generalice el ejercicio anterior para encontrar la matriz representativa de $L_\Lambda : H^r \rightarrow H^r$, $r \geq 2$ cuando $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Muestre que los autovalores de L_Λ se repiten con valor $\lambda(r - 1)$. Muestre que L_A^{-1} existe sí y sólo sí $\lambda \neq 0$.