

Dinámica No lineal

Guía N° 6 - Reducción a la variedad central
1er cuatrimestre 2006

P 1: Considere el sistema :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + ax^3 + by^2x \\ \dot{y} &= -y + cx^2 + dx^2y\end{aligned}$$

- (a) Estudiar la dinámica en el origen.
- (b) Qué sucede con la ecuación sobre la variedad central si $a + c = 0$. Considere un orden superior en el desarrollo.
- (c) Nuevamente, estudie el sistema si $a + c = 0$ y $cd + bc^2 = 0$

P 2: Estudie la dinámica cerca del origen de los siguientes sistemas. Dibuje los retratos de fases, y calcule la variedad central y la dinámica sobre ella. Diga si el origen es estable o inestable.

(a)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin \theta\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x/2 + y + x^2y \\ \dot{y} &= x + 2y + y^2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - y - x^2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - y^3 \\ \dot{y} &= 2x\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2\end{aligned}$$

·
·

Variedad central con parámetros.

P 3: Estudie los siguientes sistemas dinámicos parametrizados por el parámetro ϵ . Para $\epsilon = 0$ el origen es un punto fijo. Calcule la familia de un parámetro de variedades centrales y describa la dinámica en la variedad. Fijese que en $\epsilon = 0$ los sistemas coinciden con los del ejercicio 1. Discuta el rol que juega el parámetro si multiplica el término lineal o no lineal.

(a)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \dot{\theta} = -\theta + \epsilon v + v^2 & ii) \quad \dot{\theta} = -\theta + \epsilon v^2 + v^2 \\ \dot{v} = -\sin \theta & \dot{v} = -\sin \theta \end{array} \quad (1)$$

(b)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \dot{x} = x/2 + y + x^2 y & ii) \quad \dot{x} = x/2 + y + x^2 y \\ \dot{y} = x + 2y + \epsilon y + y^2 & \dot{y} = x + 2y + \epsilon y^2 + y^2 \end{array} \quad (2)$$

(c)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \dot{x} = x - 2y + \epsilon x & ii) \quad \dot{x} = x - 2y + \epsilon x^2 \\ \dot{y} = 3x - y - x^2 & \dot{y} = 3x - y - x^2 \end{array} \quad (3)$$

(d)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \dot{x} = -y - \epsilon x - y^3 & ii) \quad \dot{x} = -y - y^3 \\ \dot{y} = 2x & \dot{y} = 2x + \epsilon x^2 \end{array} \quad (4)$$

(e)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \dot{x} = x^2 + \epsilon y & ii) \quad \dot{x} = x^2 + \epsilon y^2 \\ \dot{y} = -y - x^2 & \dot{y} = -y - x^2 \end{array} \quad (5)$$

P 4: Reduzca a la variedad central el sistema de Fitzhugh-Nagumo,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a + bx + x^2 - xy \quad (6)$$

en un entorno de la bifurcación de saddle-node.

(a) Traslade el sistema a uno de los puntos fijos y realice cambios de coordenadas casi-identidad para eliminar todos los términos no-resonantes de la \dot{y} .

P 5: Reduzca a la variedad central alrededor de la bifurcación en $\rho = 1$ del sistema de Lorenz:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{array} \quad (7)$$

donde $\sigma, \beta > 0$. Diga de que bifurcación se trata.

P 6: Escalas de tiempo. Estudiemos el siguiente sistema. De acuerdo a lo visto en clase es claro que el mismo posee dos escalas de tiempo y que se podrá reducir su dimensión. Los primeros puntos del problema están enfocados en resolverlo de la forma conocida. Luego se resuelve utilizando la reducción a la variedad central.

$$\begin{array}{l} \dot{y} = -y + (y + c)z \\ \epsilon \dot{z} = y - (y + 1)z \end{array}$$

- (a) Para $\epsilon \ll 1$ encuentre la ecuación algebraica y la ecuación diferencial a la cual se aproxima el problema.
- (b) Ahora para comenzar a resolverlo utilizando v.c. diagonalice la parte lineal del sistema y encuentre autovalores y autovectores.
- (c) Cambiando la escala de tiempo con ϵ , considerandolo un parámetro y utilizando la dirección del autovalor atractor lleve el sistema a la forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon f(y, w) \\ \epsilon \dot{w} &= -w + y^2 - yw + f(y, w) \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

donde $f(y, w) = -y + (y + c)(y - w)$

- (d) Reduzca el sistema a la variedad central y encuentre la dinámica sobre la misma.
- (e) Compare con la ecuación hallada en el punto 1). No solo encuentro el mismo desarrollo sino que de acuerdo al teorema de reducción a la variedad central ha quedado probado que si ϵ , $y(0)$ y $z(0)$ es suficientemente chico existe una solución $u(t)$ del sistema original que cumple:

$$y(t) = u(t) + O(e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon}}) \quad z(t) = y(t) - h(y(t), \epsilon) + O(e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon}})$$