

Dinámica no lineal

Guía de Simulaciones

1er cuatrimestre 2006

P 1: Series temporales. Considere el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\dot{x} = x + \frac{10}{1 + (x - 1)^2} - 0,1e^x.$$

- (a) Intente resolverlo analíticamente, y finalmente no pueda.
- (b) Integre numéricamente para diferentes condiciones iniciales y construya un retrato de fases. Dibuje en un mismo gráfico las series temporales que le permitieron construir el retrato de fase.

P 2: Pitchfork en 1D. Considere el siguiente sistema: $\dot{x} = \mu x - 4x^3$. Se trata de identificar una bifurcación a partir de la observación de series temporales.

- (a) Integre el sistema para diferentes condiciones iniciales, con $\mu < 0$. Dibuje las diferentes series temporales en un mismo gráfico y muestre que hay un atractor.
- (b) Repita el ítem anterior, con $\mu > 0$. ¿Cuántos atractores encuentra ahora?

P 3: Retratos de fase en 2D. Integre el oscilador de van der Pol con diferentes condiciones iniciales. Muestre nulclinas y trayectorias que le permitan entender la apariencia del espacio de fases.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + x \\ \dot{y} &= -0,1x\end{aligned}$$

P 4: Bifurcación de Hopf. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen sufre una bifurcación de Hopf cuando $\mu = 0$. Determine si la bifurcación es sub- o supercrítica.

- (a) $\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y \\ \dot{y} &= -x + \mu y - x^2 y\end{aligned}$
- (b) $\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y - x^3 \\ \dot{y} &= -x + \mu y - 2y^3\end{aligned}$

P 5: Excitabilidad. Grafique las nulclinas del siguiente oscilador de relajación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3 + y \\ \dot{y} &= -0,1(x - \mu)\end{aligned}$$

- (a) Muestre que existe un ciclo límite cuando las nulclinas se cortan en la rama central de la nulclina cúbica. Grafique trayectorias en el espacio de fases para condiciones iniciales diversas y muestre que tienen todas el mismo comportamiento cualitativo.

- (b) ¿Qué ocurre cuando la intersección de las nulclinas ocurre en una de las ramas crecientes de la cúbica? Muestre que en este caso condiciones iniciales cercanas pueden tener evoluciones temporales cualitativamente diferentes.

P 6: Duplicaciones de período. El modelo del láser de CO_2 tiene un punto fijo atractor que representa el láser “encendido”. Cuando las pérdidas de la cavidad son moduladas periódicamente aparecen otros comportamientos. Estudie qué ocurre cuando la amplitud de la modulación μ es variada entre 1.5 y 2.5. Muestre series temporales, órbitas en el espacio de fases, cortes estroboscópicos, etc., todo lo que se le ocurra usar para mostrar el comportamiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y - \mu \cos(\omega t)) \\ \dot{y} &= 1 - 0,1y - x(1 + 0,1y).\end{aligned}$$

P 7: Atractor extraño. Integre el sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - 8z/3\end{aligned}$$

- Encuentre los puntos fijos del sistema y caracterícelos.
- Existe también una región atrapante del sistema. ¿Cómo la encontraría numéricamente? Ensaye con algunas trayectorias.
- ¿Qué tipos de trayectoria espera?
- Muestre que trayectorias con condiciones iniciales tan cercanas como quiera, tarde o temprano divergen entre sí y terminan siendo totalmente diferentes. ¿Qué le dice esto acerca de la predictibilidad?
- Integre numéricamente para las condiciones iniciales (10, 10, 40). Disfrute del atractor en 2D y 3D.

P 8: Huellas de caos. Existen varios tests que pueden aplicarse a series temporales para determinar si nos encontramos frente a una solución caótica. Aquí usaremos dos. El primero es el espectro de potencias de Fourier, y el segundo es el mapa de primeros retornos.

Los archivos en `fourier.c` y `close.c` devuelven el espectro en `fourier.dat` y el mapa de primeros retornos en `close.dat`. Ambos requieren que el archivo de entrada sea `datos.dat`. Edite los programas para elegir cuál de las columnas del archivo de entrada será procesada en cada caso.

El mapa de primeros retornos está construido con los intervalos de tiempo T_i para los que una serie $z(t)$ tarda en volver a un valor z_0 dado (que debe definirse en `close.c`). Un gráfico 2D puede construirse considerando T_{i+1} en función de T_i .

- Construya el espectro de Fourier para un oscilador lineal. Una escala logarítmica puede ayudar a enfatizar la carga espectral para las distintas frecuencias.
- Construya el mapa de primeros retornos para un oscilador lineal.
- Repita (a) y (b) para la serie temporal de la coordenada $z(t)$ del sistema de Lorenz con $z_0 = 25$.

P 9: **Neuronas y caos.** Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned}0,8\dot{V} &= -(17,81 + 47,71V + 32,63V^2)(V - 0,55) - 26,0R(V + 0,92) + I \\ \dot{R} &= \frac{1}{1,9}(-R + 1,35V + 1,03)\end{aligned}$$

que representan el potencial de membrana V y una ecuación simplificada para la dinámica de los canales R . Esta es una simplificación de las ecuaciones de Hodgkin-Huxley para el potencial de membrana. Estas ecuaciones producen pulsos periódicos para valores de corriente I por encima de un umbral. Supongamos ahora una corriente $I = I_0 + A \sin(2\pi\omega t)$.

- (a) ¿Cuál es la dimensionalidad del sistema? ¿Puede desarrollar soluciones caóticas?
- (b) Explore las soluciones variando la amplitud A con $I_0 = 0,075$ y $\omega = 264,6$. Caracterice las soluciones en $A = 0$ y $A = 0,4$. Entre esos valores, la dinámica se vuelve mucho más rica. ¿Qué sucede en $A = 0,1$? Esta es una solución subarmónica. Utilice el mapa de primeros retornos y el espectro de Fourier para caracterizarla.

En general, se alcanza el caos por una serie de bifurcaciones, típicamente por sucesivas duplicaciones de período. En el caso de este modelo neuronal, también se llega a caos a través de una serie de bifurcaciones, aunque más compleja.

- (a) Reduciendo en valor de A en cantidades pequeñas revelará muchas de ellas (por ejemplo en $A = 0,04$).

Muchos animales pequeños vuelan de manera muy errática, aparentemente impredecible, cuando son perseguidos. Este comportamiento parece aumentar las probabilidades de escape de la presa y puede representar una utilización adaptativa de caos neuronal en el control motor.

Aunque basados en poca evidencia directa, se sugiere que algunas de las neuronas en el cerebro están en régimen caótico al menos durante algún tiempo (por ejemplo, en el córtex de monos). Este fenómeno puede estar relacionado con cierta impredecibilidad en el comportamiento humano. Aunque se sabe poco de los procesos neuronales involucrados en el pensamiento y la conciencia, al menos sabemos que las neuronas que se utilizan en esos procesos pueden a veces operar en regímenes caóticos.