Introducción a la Cosmología

Guía 1: *Geometría de Robertson-Walker*

Problema 1: Escriba el elemento de línea del espacio euclídeo, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, en coordenadas esféricas. Agregue luego la coordenada temporal (con el signo adecuado) para obtener, así, la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espacio de Minkowski pero escrita ahora en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). Calcule el determinante de la métrica de Minskowski en coordenadas esféricas y, comparando el resultado con el correspondiente a las coordenadas cartesianas (t, x, y, z), proponga una interpretación geométrica para la cantidad $\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})}$.

Problema 2: Los tres espacios bidimensionales homogéneos e isótropos son: (i) el plano euclídeo, *i.e.*, $\mathbb{R}^2$ con elemento de línea $ds^2 = dx^2 + dy^2$; (ii) la 2-esfera, *i.e.*, la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ con elemento de línea $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; y (iii) el plano de Lobachevsky, *i.e.*, la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en $\mathbb{R}^3$ con elemento de línea $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Determine los elementos de línea de estos tres espacios en las coordenadas polares (r, ϕ) definidas por $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

Problema 3: Escriba el elemento de línea correspondiente a una 2-esfera en términos de las coordenadas angulares (θ, ϕ) que son usuales del sistema de coordenadas esféricas. A partir de la forma que toma el elemento de línea sobre la 2-esfera, proponga la forma del elemento de línea para una 3-esfera, *i.e.*, para la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ en el espacio euclídeo de 4 dimensiones parametrizado por las coordenadas (x, y, z, w).

Problema 4: Considere la métrica de Robertson-Walker para un universo cerrado,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dw^2 + \sin^2 w\ \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right],$$

y escriba ésta en términos de la coordenada de tiempo conforme η, definida según $\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}$. Escriba luego la ecuación de la trayectoria de un rayo de luz que viaja en una dirección $\phi =$const, $\theta =$const.

Problema 5: Considerando la *métrica de Robertson-Walker*

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\ \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{1}$$

donde $k \in \{-1, 0, 1\}$, calcule las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ y, a partir de éstas, el escalar de Ricci $R = R_{\mu}{}^{\mu}$.

Problema 6: Considere el denominado *universo de Milne*, el cual corresponde al caso particular de la métrica (1) con $k = -1$ y $a(t) = t$. Luego, defina $\tau = t\sqrt{1 + r^2}$ y $\rho = tr$, y escriba la métrica en las nuevas coordenadas $(\tau, \rho, \theta, \phi)$. ¿Identifica la métrica a la que ha arribado?

Problema 7: Considere *la métrica de Kasner*

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2k_1} dx^2 + t^{2k_2} dy^2 + t^{2k_3} dz^2,$$

siendo k_1, k_2 y k_3 tres constantes. Proponga una interpretación física para esta métrica pensada en el contexto cosmológico. Luego compruebe que el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, correspondiente a esta geometría se anula si $k_1 + k_2 + k_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$.

Problema 8: Considere métrica de Schwarzschild, que describe la geometría de un agujero negro,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

y muestre que en el interior del agujero negro (i.e. $r < 2GM$), donde uno puede considerar a la coordenada r como temporal y a la coordenada t como espacial, esta métrica admite una interpretación cosmológica en la cual la geometría se describe por una métrica de la forma

$$ds^2 = -d\widetilde{t}^2 + a^2(\widetilde{t}) d\widetilde{r}^2 + b^2(\widetilde{t}) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right),$$

siendo $a(\widetilde{t})$ y $b(\widetilde{t})$ dos funciones específicas. Discuta las simetrías de este universo.

Problema 9: Considere el universo de de-Sitter, que en un cierto sistema de coordenadas está descrito por una métrica de Robertson-Walker con

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \qquad k = 0.$$

Para este universo, calcule el horizonte de partícula y compare el mismo con la cantidad análoga para un universo espacialmente plano con $a(t) = t^{\lambda}$ con $\lambda > 0$.

Problema 10: Partiendo de la métrica del universo de de-Sitter escrito en las coordenadas del problema anterior, muestre que existe un sistema en el cual la métrica en dicho universo toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

Proponga una interpretación de la superficie definida por t constante y $r = \sqrt{3/\Lambda}$.