Estructura de la materia 3
Serie 0 – Repaso.
Cátedra Marta Ferraro.
1er cuatrimestre de 2006

1. Muetre que un operador hermitiano es tal que
   1.1. Tiene autovalores reales.
   1.2. Los autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.
   1.3. Los autovectores correspondientes a igual autovalor pueden elegirse ortogonales.

2. Sea una base $\{|\chi_i\rangle\}$ del espacio de estados de un sistema físico no ortogonal y $\langle\chi_i|\chi_j\rangle = S_{ij}$, el elemento *ij* de la matriz de "overlap" **S** entre dichos estados.
   2.1. Proponga formas de obtener una base ortonormal que genere el mismo espacio vectorial que la original.
   2.2. Verifique que la ortogonalización simétrica $|\chi_j'\rangle = (\mathbf{S}^{-1/2})_{ij}|\chi_i\rangle$ es una posibilidad para contestar 2.1.
   2.3. Construya el proyector ortogonal **P** sobre el subespacio generado por un subconjunto $\{|\chi_i\rangle,....,|\chi_N\rangle\}$ de funciones de la base. ¿Qué condiciones debe satisfacer?
   2.4. Verifique que $0 \le \langle\Psi|\mathbf{P}|\Psi\rangle \le 1 \quad \forall\Psi$.

3. Dado un operador **F**, compare las representaciones matriciales $F_{ij} = \langle\chi_i|\mathbf{F}|\chi_j\rangle$ y $\{f_{ij}\}$ tal que $\mathbf{F}|\chi_j\rangle = \sum_i f_{ij}|\chi_i\rangle$.
   3.1. ¿Cómo se relacionan ambas matrices?
   3.2. ¿En qué casos coinciden?

4. Para el siguiente problema, se pide
   4.1. Demostrar que el operador permutación **P** es unitario.
   4.2. Demostrar que el operador de antisimetrización $\mathbf{A} = (\sqrt{N!})^{-1}\sum(-1)^p\mathbf{P}$ satisface $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2 = \sqrt{N!}\mathbf{A}$.
   4.3. Mostrar que dada una base ortonormal de funciones de una partícula para una sistema de *N* fermiones, $\{\chi_i\}$, el conjunto $\{A|\chi_{i1}(1),....,\chi_{iN}(N)\rangle\}$ es una base ortonormal.
   4.4. Si la base de funciones de una partícula tiene *K* elementos, ¿cuántos tiene el conjunto $\{A|\chi_{i1},....,\chi_{iN}\rangle\}$ (es decir, cuál se su dimensión)?

5. Halle el conmutador [**A** , **F**] para un operador **F** de uno y de dos cuerpos.

6. Dado un conjunto de K funciones espaciales ortonormales $\{\boldsymbol{\chi}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\mathbf{r}})\}$ y otro conjunto de K funciones espaciales ortonormales $\{\boldsymbol{\chi}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{\beta}}(\vec{\mathbf{r}})\}$, tales que el primer conjunto no es ortogonal al segundo: $\int \mathbf{d\vec{r}}\ \boldsymbol{\chi}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\mathbf{r}})^*\boldsymbol{\chi}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{\beta}}(\vec{\mathbf{r}}) = \mathbf{S_{ij}}$ donde **S** es la matriz de "overlap".

Muestre que el conjunto $\{\chi_i\}$ de los 2K espín-orbitales construidos por multiplicación de los χ_i^{α} por la función de espín α y los χ_i^{β} por la función β de la forma:

$\chi_{2i-1}(\vec{x}) = \chi_i^{\alpha}(\vec{r})\alpha(\omega)$; $\chi_{2i}(\vec{x}) = \chi_i^{\beta}(\vec{r})\beta(\omega)$ (i=1,2,..........,K)

es un conjunto ortonormal

7. ¿Es posible reducir cualquier función de N fermiones a un único determinante de Slater?