Estructura de la materia 3
Serie 0 – álgebra
Cátedra Horacio Grinberg.
Verano 2006

1. Muestre que un operador hermitiano es tal que
1.1. Tiene autovalores reales.
1.2. Los autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.
1.3. Los autovectores correspondientes a igual autovalor pueden elegirse ortogonales.

2. Sea una base $\{|\chi_i\rangle\}$ del espacio de estados de un sistema físico no ortogonal y $\langle\chi_i|\chi_j\rangle = S_{ij}$, el elemento *ij* de la matriz de "overlap" **S** entre dichos estados.
2.1. Proponga formas de obtener una base ortonormal que genere el mismo espacio vectorial que la original.
2.2. Verifique que la ortogonalización simétrica $|\chi_j'\rangle = (\mathbf{S}^{-1/2})_{ij}|\chi_i\rangle$ es una posibilidad para contestar 2.1.
2.3. Construya el proyector ortogonal **P** sobre el subespacio generado por un subconjunto $\{|\chi_i\rangle,....,|\chi_N\rangle\}$ de funciones de la base. ¿Qué condiciones debe satisfacer?
2.4. Verifique que $0 \le \langle\Psi|\mathbf{P}|\Psi\rangle \le 1 \quad \forall\Psi$.

3. Dado un operador **F**, compare las representaciones matriciales $F_{ij} = \langle\chi_i|\mathbf{F}|\chi_j\rangle$ y $\{f_{ij}\}$ tal que $\mathbf{F}|\chi_j\rangle = \sum_i f_{ij}|\chi_i\rangle$.
3.1. ¿Cómo se relacionan ambas matrices?
3.2. ¿En qué casos coinciden?

4. Para el siguiente problema, se pide
4.1. Demuestre que el operador permutación **P** es unitario.
4.2. Demuestre que el operador de antisimetrización $\mathbf{A} = (\sqrt{N!})^{-1}\sum(-1)^p\mathbf{P}$ satisface $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2 = \sqrt{N!}\mathbf{A}$.
4.3. Muestre que dada una base ortonormal de funciones de una partícula para una sistema de *N* fermiones, $\{\chi_i\}$, el conjunto $\{A|\chi_{i1}(1),....,\chi_{iN}(N)\rangle\}$ es una base ortonormal.
4.4. Si la base de funciones de una partícula tiene *K* elementos, ¿cuántos tiene el conjunto $\{A|\chi_{i1},....,\chi_{iN}\rangle\}$ (es decir, cuál se su dimensión)?

5. Halle el conmutador [**A** , **F**] para un operador **F** de uno y de dos cuerpos.

6. Sea $\{\phi_i(\mu)\}$ una base ortonormal. Demostrar la siguiente desigualdad involucrando integrales bielectrónicas :

$$\left\langle \phi_i(\mu)\phi_j(\nu) \left| \frac{1}{r_{\mu\nu}} \right| \phi_j(\mu)\phi_i(\nu) \right\rangle \leq \left\langle \phi_i(\mu)\phi_j(\nu) \left| \frac{1}{r_{\mu\nu}} \right| \phi_i(\mu)\phi_j(\nu) \right\rangle$$

o sea : $K_{ij} \leq J_{ij}$

7. Analice si en un subespacio del espacio de estados de un sistema físico, la solución óptima desde el punto de vista variacional coincide con la que corresponde a diagonalizar el hamiltoniano proyectado en el subespacio en cuestión.

8. ¿Es posible reducir cualquier función de N fermiones a un único determinante de Slater?