FÍSICA 4
PRIMER CUATRIMESTRE DE 2008
MECÁNICA CUÁNTICA

1. Utilizar el principio de incertidumbre para estimar el orden de magnitud del diámetro de un átomo. Comparar el resultado con el radio de Bohr de la primera órbita del átomo de hidrógeno. **Ayuda**: suponer que el electrón está confinado en una región de longitud δx. Esto implica que tiene una energía cinética no nula; además hay una energía potencial del orden de magnitud de $-e^2/\delta x$. Hallar δx de manera tal que la energía total sea un mínimo y evaluar la expresión para ésta.

2. * Mostrar que si se define

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{< x^2 > - < x >^2} \\ \Delta p &= \sqrt{< p^2 > - < p >^2} \end{aligned}$$

es decir que se usa el valor cuadrático medio, entonces la relación de incerteza de Heisenberg se expresa

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ayuda:Considere primero la integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x) + \lambda \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx$$

con $\lambda \in \Re$. Nótese que $I(\lambda) \geq 0$. Desarrollar el integrando, usar la definición de valores medios y el hecho que $I(\lambda)$ será una forma cuadrática en λ definida positiva. Para obtener el resultado general, repita el procedimiento con la función $exp\{i < p > x/\hbar\}\, \psi(x- < x >)$.

3. Verifique la relación de incerteza de Heisenberg en los siguientes casos (discuta cuidadosamente el ítem (c)):

   (a) $\psi(x) = A\exp(-a^2x^2)$

   (b) $\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ax) & x \leq 0 \\ A\exp(-ax) & x \geq 0 \end{cases}$

   (c) $\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ip_0x/\hbar) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & sino \end{cases}$

4. Utilizando el procedimiento usado para mostrar que $(p)_q = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ muestre que es cierto que $(q)_p = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ y que $(q^n)_p = (i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n}$

5. Muestre que q y $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ son operadores líneales y hermitianos. (suponga que las funciones sobre las que actúan son de cuadrado integrable y que se anúlan en infinito)

6. Encuentre un operador líneal y hermitiano que represente la cantidad dinamica qp

7. Determinar cuáles de las siguientes funciones son autofunciones del operador $\hat{p}_x$ y del operador $\hat{p}_x^2$:

   (a) $\psi(x) = A\sin(kx)$

   (b) $\psi(x) = A\cos(kx) + iA\sin(kx)$

   (c) $\psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$

   (d) $\psi(x) = A\sin(kx) + A\cos(kx)$

   (e) $\psi(x) = A\exp i(x-a); \quad a = cte$

   (f) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iA\exp(-ikx)$

   (g) $\psi(x) = A\exp(ax^2) \qquad a = cte, real$

(h) $\psi(x) = A\exp(ax) \qquad a = cte, real$

8. Demostrar que las combinaciones lineales de los operadores $\hat{A}+i\hat{B}$ y $\hat{A}-i\hat{B}$ no son hermíticas aunque $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sí lo sean.

9. * Para una partiícula cargada en un campo magnético encuentre las relaciones de conmutación para los operadores correspondientes a las componentes de la velocidad.

10. Determinar para qué potenciales $V(x)$, las siguientes funciones son autofunciones del operador energía $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ (Hamiltoniano)

    (a) $\psi(x) = A\exp(ax) + B\exp(-ax)$
    (b) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iB\exp(-ikx)$
    (c) $\psi(x) = A\exp(-ax^2/2)$

11. Sea una partícula en una dimensión cuya función de onda es

$$\psi(x) = A\frac{\exp(ip_0x/\hbar)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

    donde a, p_0 y A son constantes.

    (a) Determinar A para que la densidad de probabilidad esté normalizada.
    (b) Si se mide la posición de la partícula ¿cuál es la probabilidad de que el resultado esté comprendido entre $-a/\sqrt{3}$ y $a/\sqrt{3}$?
    (c) Calcular el valor medio del operador $\hat{p}_x$.

12. Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x) = A\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}e^{ip_0x/\hbar}$$

    Hallar:

    (a) La distribución de probabilidades en x y el valor de la constante A.
    (b) $< x >$y $< p_x >$, y las dispersiones correspondientes.
    (c) La función de distribución del impulso $\phi(p)$ y la distribución de probabilidades en p.
    (d) El valor medio de la energía cinética.
    (e) $\psi(x,t)$ y la distribución de probabilidades para x y para p en el instante t.
    (f) Δx y Δp en el instante t, y el movimiento del centro del paquete.

13. Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{k_0^2}\right]e^{i(kx-\omega t)}dk$$

    donde k_0 es una constante positiva y $A = 1/\sqrt{k_0}$. Calcular el valor medio del impulso lineal p_x y su dispersión.

14. Calcular $[\hat{x},\hat{p}_x]$, $\left[\hat{x},\hat{p}_x^2\right]$, $\left[\hat{x}^{-1},\hat{p}_x\right]$,$[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y]$ y sus variantes intercambiando las cooordenadas, $\left[\hat{x},\hat{H}\right]$ y $\left[\hat{p}_x,\hat{H}\right]$. Nota: considere que $\hat{H} = \hat{p}_x^2/2m + V(\hat{x})$.

15. El operador $\exp\left(\hat{A}\right)$ posee significado si se lo desarrolla en serie de potencias:

$$\exp\left(\hat{A}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

    Mostrar que si ϕ es un autoestado de $\hat{A}$ con autovalor a, entonces es también autoestado de $\exp\left(\hat{A}\right)$. Determinar el autovalor.

16. Exprese

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

como una maiz de 2x2, donde a es una constante positiva.

17. Sea $\hat{H}$ el operador hamiltoniano de un sistema físico y $\phi_n(x)$ sus autoestados con autovalor E_n. Para un operador arbitrario $\hat{A}$ probar que $\left\langle [\hat{H},\hat{A}]_n \right\rangle = 0$, donde el subíndice n indica que el valor medio se toma sobre el estado $\phi_n(x)$.

18. Dada la función de onda:

$$\psi(x) = \begin{cases} A(1+ax)\exp(ax) & para \quad x \leq 0 \\ A(1-ax)\exp(-ax) & para \quad x \geq 0 \end{cases}$$

    (a) Normalice esta función de onda.
    (b) Halle la energía E y el potencial $V(x)$ tales que $\psi(x)$ sea autoestado de $\hat{H}$ (con autovalor E), suponga que $V(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.
    (c) Calcule los valores medios de x, p y la dispersión correspondiente a cada uno.

19. Una partícula de masa m se mueve en un potencial conservativo cuya función potencial es $V(x,y,z)$. Encuentre la función de Hamilton para este sistema y escriba el Hamiltoniano $(H)_q$. Escriba la ecuación de Schrödinger para:

    (a) la partícula libre
    (b) una partícula bajo la influencia de una fuerza uniforme y constante
    (c) el átomo de hidrógeno
    (d) el átomo de helio
    (e) oscilador armónico.

20. Encuentre en lenguaje de coordenadas el operador que corresponde a la componente en el eje z del momento angular de una partícula. Muestre que este operador se puede escribir también como $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

21. Muestre que si $\hat{F}$ y $\hat{H}$ conmutan entonces $\frac{d<\hat{F}>}{dt}$ y $\frac{d^2<\hat{F}>}{d^2t}$ son cero, con lo cual F es una constante de movimiento.

22. Muestre que las autofunciones en energía de un sistema cuyo Hamiltoniano puede ser escrito como la suma de terminos, cada uno de los cuales actua sobre una coordenada distinta, $H = H(1) + H(2) + ... + H(n)$ pueden ser escrita como el producto de las autofunciones de cada uno de los distintos hamiltonianos, i.e. $\psi = \psi_a(1)\psi_b(2)...\psi_s(n)$. Muestre que la energía correspondiente a esta autofunción es $E = E_a + E_b + ... + E_s$

23. Considere el siguiente potencial (pozo infinito):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

    donde a es una constante y representa el ancho del pozo.

    (a) Halle las autofunciones de $\hat{H}$ y los niveles de energía de una partícula de masa m.
    (b) Grafique φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 y sus módulos al cuadrado, donde las φ_i son las funciones de onda de los primeros cuatro estados de la partícula.
    (c) Calcule la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(0, a/4)$ para estos cuatro autoestados.
    (d) Calcule $< x >$, $< p >$, $< x^2 >$, $< p^2 >$, Δx, Δp y $\Delta x \Delta p$ para los mismos cuatro estados.
    (e) Calcule y grafique la probabilidad de que la partícula tenga momento lineal p para el primer autoestado y para uno de n grande.

(f) Escriba una expresión general para $\psi(x,t)$.

24. Una partícula de masa m que se mueve en una dimensión está confinada en una región $0 < x < L$ por un potencial infinito. Además la partícula experimenta un potencial $\lambda\delta(x-L/2)$. Encuentre una ecuación para los autovalores E en términos de la masa, λ y el tamaño L del sistema.

25. Una partícula de masa se mueve en el potencial $V(x) = -g[\delta x - a) + \delta(x+a)]$ donde la constante $g > 0$. Encuentre la autofunción del estado fundamental y la ecuación que relaciona su autovalor con la constante g.

26. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Encuentre las autofunciones de $\hat{H}$ y una ecuación para sus autovalores, para $E < 0$. ¿Cuantas soluciones linealmente independientes hay si $E > 0$? ¿Y si E<0?

27. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre las autofunciones de H y una ecuación para sus autovalores para $E < 0$. Compare con el problema anterior.

28. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ V_0 & a < |x| < b \\ 0 & |x| < a \end{cases}$$

a, b y $V_0 > 0$. Hallar las ecuaciones de autovalores y escriba las funciones de onda correspondientes para los casos:

(a) $0 < E < V_0$

(b) $E > V_0$

29. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$a > 0$. Considerando que la partícula incide desde los x negativos, halle los coeficientes de reflexión y transmisión para los siguientes rangos de energía de la partícula:

(a) $0 < E < V_0$

(b) $E > V_0$.

(c) Repita si la partícula incide desde los x positivos.

Discuta físicamente los resultados hallados.

30. Un modelo aproximado para el problema de un átomo próximo a una pared es considerar a una partícula moviendose en el potencial

$$V(x) = -V_0\delta(x) \text{ si x>-d}$$

$$V(X) = \infty \text{ si x<-d}$$

(a) Encuentre la modificación en el estado ligado causado por la pared cuando ella esta muy lejos. Explique tambien cuan lejos es ”muy lejos”

(b) Cuál es la condición que hay que imponer sobre V_0 y d para que exista al menos un estado ligado.

31. La función de onda de una partícula de masa M en un potencial unidimensional $V(x)$ esta dada por la expresión

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \alpha x \exp(-\beta x)\exp(i\gamma t/\hbar) \quad \text{si x>0} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si x<0} \end{aligned}$$

donde α, β y γ son cosntante spositivas

(a) ¿Está ligada la partícula? Explique

(b) Cuál es la densidad de probabilidad $\rho(E)$ para una medición de la energía total de la particula.

(c) Encuentre el autovalor más bajo para $V(x)$ en términos de las cantidades dadas.

32. Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional bajo la influencia de un potencial $v(x)$. Suponga que tiene un autoestado que es $\phi(x) = \left(\gamma^2/\pi\right)^{1/4}\exp(-\gamma^2 x^2/2)$ con energía $E = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}$

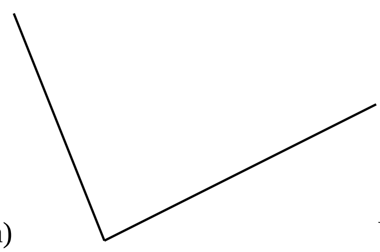
(a) Encuentre la posición media de la partícula

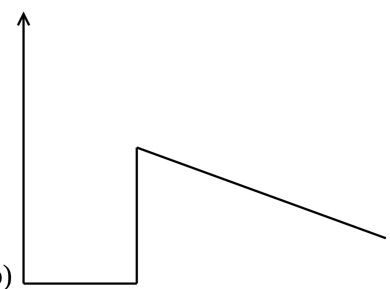
(b) Encuentre el momento medio de la partícula

(c) Encuentre $V(x)$

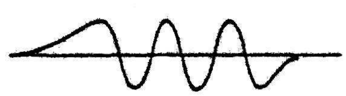
(d) Encuentre la probabilidad $P(p)dp$ que el momento de la partícula esté entre p y $p+dp$

33. Analice en cuáles de los siguientes potenciales existe al menos un estado ligado. Para aquéllos en donde los haya, realice gráficos cualitativos de las autofunciones de $\hat{H}$ para varios valores de energía.

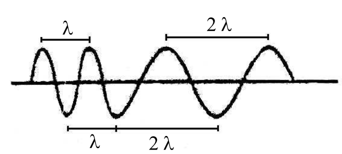
a) 

b) 

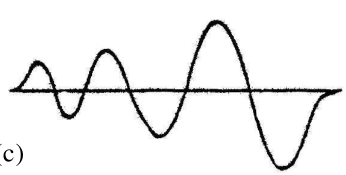
34. Dados los siguientes gráficos de autofunciones de $\hat{H}$, haga un diagrama cualitativo de los potenciales unidimensionales que las producen, marcando en cada caso una línea horizontal para la energía del sistema e indicando de qué nivel se trata (tome al estado fundamental como $n = 1$).



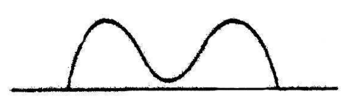
(a)



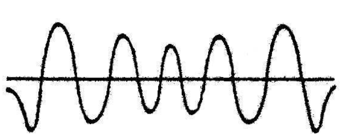
(b)



(c)



(d)



(e)

35. Escriba explicitamente los cinco primeros polinomios de Hermite usando la relación de recurrencia y la formula $H_n = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n \exp(-\xi^2)}{d\xi^n}$ y verifique que definen las mismas funciones a menos de constantes multiplicativas.

36. Use $H_n = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n \exp(-\xi^2)}{d\xi^n}$ y la ecuación diferencial para mostrar la validez de las relaciones de entre los polinomios de Hermite y sus derivadas dadas en las teóricas.

37. Este ejercicio es para que se familiaricen con los operadores de creación y aniquilación de cuántos del oscilador armónico.

    (a) Evalue $[a, (a^+)^n]$

    (b) Encuentre las autofunciones del operador a (operador de aniquilación del oscilador armónico unidimensional).

    (c) ¿Cuál es el número de cuántos medio de estos autoestados? Justifique.

    (d) Evalue $[H, a^+]$ y $[H, a]$.

    (e) Usando la expxresión en términos de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ verifique que el primer estado exitado es $\psi_1 = a^+ \psi_o$ donde ψ_0 es la función de onda del estado fundamental.

38. A $t = 0$, un dado oscilador está descripto por la función de onda $\psi(x) = A \exp(-\frac{x^2}{2a^2}) \exp(\frac{ip_0 x}{\hbar})$. Encuentre la probabilidad que la energía de este oscilador se mida en $\hbar\omega/2$

39. Evalue el valor de expectación de la energía potencial para el enésimo autoestado del oscilador armónico.

40. (a) Para una partícula de masa m que se mueve en un oscilador armónico con potencial $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$ escriba la solución mas general de la ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo $\psi(x,t)$ en términos de los autoestados del oscilador armónico $\phi_n(x)$

    (b) Usando (a) muestre que el valor de expectación de x como función del tiempo puede ser escrito como $< x >= A \cos \omega t + B \sin \omega t$ donde A y B son constantes.

    (c) Usando a) muestre explicitamente que el promedio temporal de la energía potencial satisface $< V >= \frac{1}{2} < E >$

    Recuerde la igualdad $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \phi_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \phi_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}} \phi_{n-1}$

41. Un oscilador armónico está a $t = 0$ en el estado $\psi(x,0) = A \exp(-x^2/2b^2) x(2x + i)$

    (a) Encuentre la función de onda al tiempo t,

    (b) Encuentre el valor promedio de la energía.

42. Sea una partícula de masa m en un pozo de potencial infinito de ancho a. En $t = 0$ el estado del sistema es $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, donde las $\varphi_n(x)$ son las autofunciones de $\hat{H}$.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad P de que una medición de la energía de la partícula, efectuada en un instante t cualquiera, dé un resultado mayor que $5E_1$, siendo E_1 la energía del estado fundamental? Si $P = 0$, ¿cuáles coeficientes deben ser cero y cuáles no?

    (b) Si sólo c_1 y c_2 son distinctos de cero, normalizar la función de onda a $t = 0$ en función de ellos y calcular el valor medio de la energía en este estado. ¿Cuánto deben valer $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ para que sea $< H >= 2.5E_1$? Si además $< \hat{x} >= a/8$, calcular la fase de c_2 si c_1 es real y positivo.

    (c) Calcular $\varphi(x)$ y $< \hat{x} >$ para un tiempo t.

    (d) Calcular $< p >$ para todo tiempo.

43. Para un pozo cuadrado de profundidad V y ancho 2a obtenga una expresión para el número de niveles de energía discretos como función de V y a.

44. Considere el siguiente potencial (pozo infinito):

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & |x| \le a;\, |y| \le b \text{ y } |z| \le c \\ \infty & sino \end{cases}$$

Escribiendo el potencial en la forma:

$$V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

y proponiendo para la función de onda la separación:

$$\varphi(x,y,z) = f(x)g(y)h(z)$$

(a) Hallar las autofunciones del Hamiltoniano de una partícula de masa m en ese potencial.

(b) Hallar los autovalores correspondientes.

(c) Trate el mismo problema centrando la caja. Discuta la paridad de las autofunciones.

(d) * Use la expresion de los autovalores de la energía para derivar el numero de autovalores de la energía por unidad de energía.

45. Un ”quark” (masa $m_q = m_p/3$) esta confinado en una caja cúbica de $2fm$ de lado. Encuentre la energía de excitación del primer estado excitado.

46. La energía potencial de un oscilador armónico tridimensional esférico puede escribirse como:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{aligned}$$

Dé la forma explícita de las autofunciones y autovalores de $\hat{H}$ en las dos bases. Analice la degeneración de cada nivel de energía. Verifique que el estado fundamental en las dos descripciones es el mismo .

47. Sea un oscilador armónico tridimensional anisotrópico, con una frecuencia de oscilación diferente a lo largo de cada eje, de modo que:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

Escribir la expresión de los niveles de energía en términos de los ω´s. Encontrar los cuatro niveles de energía más bajos para el caso $\omega_x = \omega_y = 2\omega_z/3$, y determinar su degeneración.

48. Una partícula de masa m esta sujeta a un potencial de oscilador armonico tridimensional. El estado fundamental tiene una energía $E = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$ y los estados pueden ser descriptos tanto en la base cartesiana como en esféricas.

(a) En la base cartesiana de un listado de los números cuánticos relevantes para los tres primeros estados excitados (hasta la energía $E = \frac{9}{2}\hbar\omega_0$) y discuta la degeneración de los mismos.

(b) En la base esférica haga un sketch del potencial efectivo. Para un dado l de un sketch de la función de onda radial del estado de menor energía y de los dos estados excitados más próximos.

(c) Para los cuatro niveles de la parte a) escriba el contenido de momento anglar y paridad de cada nivel. Compare las degenraciones totales con las obtenidas en a)

49. Sea una partícula de masa m sometida al siguiente potencial central:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ -V_0 & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Calcular las autofunciones y autovalores del hamiltoniano correspondientes a estados con $l = 0$.

50. Demuestre que para un potencial de pozo esférico tridimensional

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

existen estados ligados sólo si la profundadidad del pozo excede un cierto valor.

(a) Escriba explícitamente ese valor y justifique.

(b) ¿Porqué el problema análogo en una dimension tiene una rspuesta diferente (existen simpre estados ligados)?

(c) ¿Puede demostrar que la naturaleza general de las respuestas dadas en a) y b) son validas para potenciales atractivos de formas arbitrarias?

51. Sustiyendo $\chi(r) = rR(r)$ en la ecuación radial de un átomo hidrogenoide

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_n + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R = 0 \tag{1}$$

muéstre que la función $\chi(r)$ y los autovalores E_n pueden ser considerados como las autofunciones y autoenergías de un problema unidimensional donde la partícula de masa μ se mueve en el potencial

$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ si $r > 0$

$V(r) = \infty$ si $r < 0$

52. El isótopo radioactivo ${}_{83}Bi^{212}$ decae a ${}_{81}Tl^{209}$ emitiendo una partícula α con una energía de $6MeV$.

(a) En un intento de calcular la vida media considere primero una barrera de potencial de ancho b y altura V_0 y calcule la transmición de una partícula de masa m que incide con energía E.

(b) Usando el resultado anterior, obtenga una estimación númerica para la vida media del Bi. Elija parametros razonables para aproximar el potencial que ve la partícula α y recuerde que el problema es tridimensional.

53. Una partícula de masa m esta constreñida a moverse entre dos esferas impenetrables de radios a y b. Encuentre la energía y función de onda del estado fundamental.

54. (a) Una partícula se mueve en el potencial $V(x,y,z) = A(x^2+y^2+2\lambda xy) + B(z^2+2\mu z)$ donde $A > 0, B > 0, |\lambda| < 1, \mu$ arbitrario. Encuentre los autvalores de la energía.

(b) Considere ahora el potencia modificado V_{nuevo} : para $z > -\mu$ y cualquier x e y es $V_{nuevo} = V$ de la parte a), para $z < -\mu$ y cualquier x e y es $V_{nuevo} = \infty$. encuentre la energía del estado fundamental.

55. Los primeros 6 niveles de energía de un sistema tridimensional tienen los siguientes valores para n, l a medida que la energía crece: (0,0), (1,0), (0,1), (0,2),(1,1) y (2,0). De el número de nodos que tiene la función de onda radial para cada uno de estos estados y explique que tipo de dependencia tiene con r para valores pequeños de r.

56. Para un átomo hidrogenoide muestre que la degeneración del enésimo nivel es n^2

57. Un rotador rígido tiene momento de inercia I y velocidad angular ω.

(a) Encuentre el hamiltoniano del rotador. ¿Qué constantes de movimiento tiene el sistema?

(b) Encuentre los autoestados del rotador y los posibles valores de la energía de rotación.

(c) La distancia de equilibrio entre los protones de una molécula de H_2 es $r_0 = 0.74$Å. Considerándola como un rotador rígido, encuentre la energía de rotación del primer nivel excitado (l = 1).

(d) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida para la transición l = l a l=0?

58. Sea un átomo de hidrógeno en su estado fundamental

   (a) Calcular la probabilidad de encontrar al electrón a una distancia mayor que a_0 ($a_0 \approx 0.529167$Å es el radio de Bohr) del núcleo.

   (b) Cuando este electrón está a una distancia $2a_0$ del núcleo toda su energía es potencial. De acuerdo con la física clásica este electrón no puede exceder esa distancia. Cuánticamente ¿cuál es la probabilidad de hallar al electrón a $r > 2a_0$?

   (c) El radio de un protón es del orden de 10^{-13}cm. Calcule la probabilidad de que, en el átomo de hidrógeno, el electrón esté dentro del protón.

59. Calcular $< r >$ y $\left\langle r^{-1} \right\rangle$ para el estado fundamental de un átomo hidrogenoide de número atómico Z. Calcular $\langle V(r) \rangle$ para ese estado.

60. Encontrar los valores más probables de r (en unidad de a_0) para el electrón del átomo de hidrógeno en el estado $2s$.

61. Un mesón μ es una partícula similar al electrón pero con masa $m_\mu = 206 m_e$ y con su misma carga. Suponga que, en un átomo de hidrógeno, el electrón ha sido desplazado por una partícula μ y que esta va decayendo de un nivel a otro. Calcule la energía que tendría un fotón cuando la partícula pasa de la orbita $n = 2$ a $n = 1$ en el ${}^{208}Pb(Z = 82)$. Desprecie otros efectos (como la estructura fina).

62. Sea la función de onda de un átomo de hidrógeno:

$$\psi = A\left(\varphi_{210} - 2 \cdot \varphi_{21-1} + 3 \cdot \varphi_{100}\right)$$

   donde las φ_{nlm} son las autofunciones normalizadas de $\hat{H}$.

   (a) Normalizar ψ

   (b) Hacer una tabla con los valores que pueden medirse de E, L^2 y L_z, y sus probabilidades.

   (c) Calcular $\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle, \left\langle \hat{L}_z \right\rangle$ y $\left\langle \hat{H} \right\rangle$.

   (d) Hallar ψ para un tiempo t cualquiera y repetir los cálculos de (c). Discutir el resultado.

63. Considere un electrón en un átomo de hidrógeno en el estado

$$\Psi = \frac{r}{2a_0\sqrt{6a_0^3}} \exp\left(\frac{-r}{2a_0}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}$$

   $n = 2, l = 1$.

   (a) Calcular la densidad de carga en función de r. Determinar, en términos de a_0, su máximo.

   (b) Calcular $\langle r \rangle$ y comparar con el resultado en (a).

64. Suponga que la función de onda de espín de un electrón es

$$S = aS_{1/2} + bS_{-1/2} \tag{2}$$

   donde $S_{\pm 1/2}$ son funciones de onda normalizadas del spín. Calcule $< S_z >$ para el estado S.

65. Suponga que conoce las funciones de onda del átomo de hidrógeno y las escribe como de costumbre $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ y suponga que el núcleo de hidrógeno está situado a una distancia d de un potencial infinito que por supuesto tiende a distorsionar el átomo de hidrógeno.

   (a) Encuentre la forma explícita de la función de onda del estado fundamental de este átomo de hidrógeno cuando $d \to 0$

(b) Encuentre todos los otros autoestados de este átomo de hidrógeno (es decir cuando $d \to 0$) en términos de los R_{nl} y Y_{lm}.

66. Encuentre el operador de Pauli para el cuadrado del espín y muestre que cualquier función de onda de spín normalizada es autovalor de $\mathbf{S} \bullet \mathbf{S}$ con autovalor $3/4\hbar^2$

67. Verificar por medio del cálculo matricial que las siguientes matrices (matrices de Pauli):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular si escribimos $S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i$, $i \in \{x,y,z\}$, y entonces provee una representación matricial para el momento angular. Mostrar que esta representación particular corresponde al caso $s = 1/2$. Ayuda: formar la matriz para S^2 y hallar sus autovalores.

68. Muestre que el cociente entre la energía del término espín-orbita y el potencial electrostico es del orden E_n/mc^2 (suponga orbitas circulares de Bohr como una aproximación)

69. Muestre que $\mathbf{J}.\mathbf{J}$ conmuta con J_x, J_y y J_z (donde $J = L + S$)

70. Suponiendo que los dos electrones del átomo de helio están en estados con $\{l = 1, s = 1/2\}$ y $\{l = 2, s = 1/2\}$ respectivamente.

   (a) Calcular los valores posibles de los números cuánticos l del impulso orbital total y s del spín total.
   (b) Hallar los posibles valores del número cuántico j que corresponden a $\hat{J}^2$, siendo $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$.
   (c) Considerando ahora cada electrón por separado, hallar los valores posibles de los números cuánticos j_1 y j_2 del momento angular total de cada electrón.
   (d) A partir de lo hallado en (c) calcular los valores posibles del número cuántico j del impulso angular total. Comparar con lo hallado en (b).

71. Calcule el corrimiento de energía debido al termino $l.s$ y el relativista en conjunto.

72. Considere el hamiltoniano siguiente

$$\hat{H} = -\mu B \left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right) - \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

donde $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ describen el vector espín de dos partículas distinguibles de espín $1/2$.

   (a) En $t = 0$ el estado inicial es $\alpha_1 \otimes \beta_2$. Reescriba el hamiltoniano en función del momento angular total $\hat{J} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$. Escriba el estado inicial en función de autoestados caracterizados por $\hat{J}_z$ y $\hat{J}^2$.
   (b) ¿Cuáles son los valores posibles de la energía?
   (c) Muestre que la probabilidad de medir $S_{1z} = +1/2$ como función del tiempo esta dada por

$$P(S_{1z} = 1/2) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\lambda\hbar t)\right)$$

73. Demostrar que para un átomo en un autoestado descripto por n, l, s, j y m_j vale que ($l > 0$):

$$\left\langle \hat{S} \cdot \hat{L} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} l\hbar^2 & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1)\hbar^2 & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

(Nota: al término $\left\langle \hat{S} \cdot \hat{L} \right\rangle$ se lo conoce como acoplamiento spin-órbita). ¿Qué pasa si $l = 0$?

74. Determinar clásicamente el momento magnético de un electrón en una órbita circular de radio r alrededor de un protón. Escribirlo en función de un operador conocido y cuantificarlo.

75. Efecto Zeeman: Estudiar el efecto de la aplicación de un campo magnético constante y uniforme $\vec{B}$ sobre un átomo de hidrógeno. Escribir el nuevo $\hat{H}$ resultante y encontrar sus autofunciones y autovalores. Hallar la degeneración de cada estado y comparar en un gráfico los valores de energía antes y después de aplicar el campo magnético.

76. (a) Evalue clasicamente la maxima energía de interacción de un magnetón nuclear y un magnetón de Bohr si están separados por una distancia igual al primer radio de Bohr.

 (b) Evalue clásicamente la energía de orientación de un magnetón nuclear en el campo magnetico debido a un electrón dando vueltas en la orbita circular de Bohr mas baja en el hidrógeno y compare con a)

 (c) Si la función de onda de dos particulas se escribe como $\psi(1,2) = A[\psi_a(1)\psi_b(2) \pm \psi_b(1)\psi_a(2)]$ calcule el valor de la constante A que la normaliza.

 (d) Calcule el valor de expectación de la energía de la partícula 1 en la función de onda del ítem anterior.

 (e) Para la misma función de onda encuentre la energía total del sistema y muestre que esta energía está bien definida. Extienda la función de onda como para aplicarla a un sistema de tres particulas que no interactuan. Encuentre la forma apropiada de la función de onda normalizada de este sistema, tal que haya una particula en el estado a, otra en b y la ultima en c. (suponga que las funciones de onda de una particula estan normalizadas). Muestre que $\psi(1,2,3) = 0$ si cualesquiera de dos partículas estan en el mismo estado.

 (a) Muestre que la autofunción de la energía de un sistema compuesto por N fermiones que no interactuan que es de la forma de un determinante

$$\psi(1,2,...,N) = A \begin{vmatrix} \psi_a(1) & \psi_a(2) & . & . & . & \psi_a(N) \\ \psi_b(1) & \psi_b(2) & . & . & . & \psi_b(N) \\ . & . & . & . & . & . \\ .. & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \psi_n(1) & \psi_n(2) & . & . & . & \psi_n(N) \end{vmatrix}$$

 es una autofunción de la energía total del sistema y satisface el postulado de la antisimetría entre cualquier par de partículas, siendo nula si dos (o más) partículas están en el mismo estado.

 (b) Muestre que la constante A vale $|A| = (N!)^{-1/2}$

77. (a) Suponiendo que los espines no están acoplados a interacciones externas, muestre que la función de onda total se puede escribir como $\psi = U(q_i)\Sigma(\sigma_i)$.

 (b) Muestre que las funciones U y Σ deben ser o simétricas o antisimétricas a partir de la invariancia del Hamiltoniano frente al intercambio por separado de los espines o las coordenadas.

78. Considere un sistema físico consistente en dos partículas no interactuantes de espín 1/2. Introduzca una pequeña perturbación repulsiva proporcional al cuadrado de la distancia entre las dos partículas y evalue el efecto a primer orden de esta interacción sobre los niveles no perturbados. Muestre que si un nivel es separado por la interacción el estado triplete tiene menos energía que el singlete.

79. * Suponiendo que el hamiltoniano se puede escribir como $H = \frac{p^2}{2m} + v(x)$ y usando las reglas de conmutación de los momentos y las coordenadas muestre la validez de la relación

$$\sum_n (E_n - E_0)| < n|x|0 > |^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$$