Guía 4: Movimiento Oscilatorio

Cinemática del movimiento oscilatorio

1) El desplazamiento de un objeto está determinado por la ecuación y(t) = 3cm sen(20π/s t). Grafique *y* en función del tiempo y señale la amplitud y el periodo de las oscilaciones. Escriba las expresiones de v(t) y a(t)

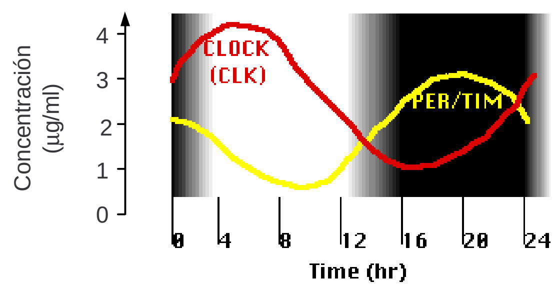
2) La coordenada de un objeto viene dada por (0.057m) cos(3.9/s t).

a) ¿Cuánto valen la amplitud *A*, la frecuencia angular ω, la frecuencia *f*, el período *T* y la fase?

b) Escriba las expresiones para la velocidad *v* y la aceleración *a* del cuerpo.

c) Determine *y*, *v* y *a* en t=0.25 segundos.

3) En biología se encuentran una gran variedad de fenómenos oscilatorios (ritmos circadianos, actividad cardiaca, crecimiento estacional, actividad neuronal rítmica), en los cuales la variable que sigue un comportamiento oscilatorio no es la posición de un objeto sino de algún otro tipo (concentración de proteínas, flujo, tamaño, voltaje). Asimismo, difícilmente las variables sigan funciones sinusoidales puras.



El gráfico muestra la fluctuación en las concentraciones de las proteínas PER/TIM y CLOCK en el transcurso de un día en células de la mosca *Drosophila melanogaster*. Estas proteínas controlan el ritmo circadiano de la mosca. Hay una tercera oscilación en la figura: la luminosidad (en tonos de gris). ¿Cuál es el período de cada oscilación? ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones de concentración? ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos curvas?

4) Un objeto que tiene un movimiento armónico simple tiene su máximo desplazamiento 0,2 m en t = 0. Su frecuencia es de 8 Hz.

a) Hallar los instantes en que las elongaciones son por primera vez 0,1 m; 0 m; -0,1m; -0,2m

b) Halle las velocidades en dichos instantes.

<u>Resp.</u> a) 0,02s; 0,031s; 0,042s; 0,062s b) –8,67m/s; -10m/s; -8,67m/s; 0m/s

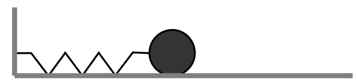
5) Un objeto describe un movimiento armónico simple con una amplitud *A* = 63 mm y una frecuencia de 4.1 1/s. Considere t=0 cuando el objeto pasa por el punto medio del recorrido.

a) Escriba las expresiones para x, v, a.

b) Determine *x*, *v* y *a* para t=1.7 segundos.

Dinámica del movimiento oscilatorio armónico

6) Un cuerpo está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de constante k=500 N/m y largo natural 10 cm (el otro extremo del resorte está fijo a la pared). Si el cuerpo se desplaza una distancia 2cm de su posición de equilibrio, comprimiendo al resorte, y se lo suelta, oscila con un período de 0,63 s.



a) Haga el diagráma de cuerpo libre y halle la ecuación del movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton.

b) Determine el valor de la masa en función de los datos.

c) Escriba las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo

Resp. b) 5 kg c) x=-2cm cos(10t/s)+10cm; v=20cm/s sen(10t/s); a=200cm/s^2 cos(10t/s)

7) La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es 5 Hz ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es 15 cm? Resp: 148 m/s^2

8) Para estirar 5 cm un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de 40 N. Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de 2 kg. La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte 10 cm a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:

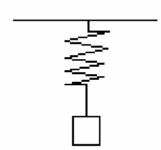
a) ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?

b) Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y grafíquela señalando la posición de equilibrio.

c) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de 0,2 seg. Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

Resp: a) |A|=10 cm; f=3,18 Hz; T=0.314 seg b) con x_{eq}=0; x(t)=10 cm cos(20 t/seg) c) x= - 6.54 cm; v= - 1,5 m/s ; a=26.1 m/s^2

9) Un cuerpo de masa 800 g está suspendido de un resorte de longitud natural 15 cm y constante elástica K=320 N/m, que se encuentra colgado del techo.



a) Halle la posición de equilibrio.

b) Si se desplaza al cuerpo 1,5 cm hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.

Resp: a) 17,5 cm del techo

10) Usando los órganos sensoriales del sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.

a) Si al quedar atrapado un insecto de 1 gr la tela vibra a 15 Hz, ¿cuál es la constante elástica de la tela?

b) ¿Cuál seria la frecuencia cuando queda capturado un insecto de 4 gr?

Resp: a) 8,9 N/m b) 7,5 Hz

11) Demuestre que el período de oscilación de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (en pequeñas oscilaciones), donde L es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

12) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de T = 3,00 segundos en un lugar en donde g = 9,803 m/s² y un período de T = 3.0024 segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de g este último lugar? Resp: 9,787 m/s^2

13) En la *Microscopía de Fuerza Atómica*, una punta de prueba se utiliza para explorar superficies con resolución nanométrica (1nm=10^{-9} m). En una de las aplicaciones de esta técnica se unen a la superficie moléculas de la cuales se quiera investigar sus propiedades físicas tales como resistencia a la tensión, elasticidad y estructura. Se busca en cada experimento pegar con la punta de prueba un extremo de una molécula única (el otro permanece adherido a la superficie, como se muestra en la Fig. 1). Al retraer la punta hacia arriba, la molécula comienza a estirarse y ejerce una fuerza hacia abajo sobre la punta (Fig 1a). La punta de prueba se comporta como un resorte del cual el experimentador conoce la constante elástica (K_1) y puede medir en cada instante su elongación (L_1) y la de la biomolécula (L_2) (Fig 1b).

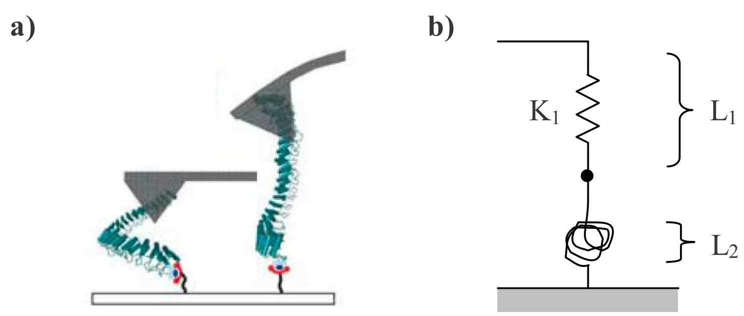


Figura 1. a) La caricatura muestra cuando la punta de prueba toca una molécula de proteína (izq) y la estira (der). La punta se deforma elásticamente por la fuerza realizada por la molécula al estirarse. **b)** En el modelo, el resorte representa a la punta de prueba y el ovillo a la biomolécula de interés. L1 y L2 son nulos cuando la punta de prueba o la proteína, respectivamente, tienen su longitud natural.

El estudio las propiedades elásticas de una proteína con dominios estructurales de ankirina mostró que ésta se comporta, bajo ciertas condiciones, como un resorte de dimensiones nanométricas. La figura 2 muestra mediciones obtenidas para tres proteínas distintas en las cuales se grafica la fuerza que ejerce la proteína en función de su estiramiento.

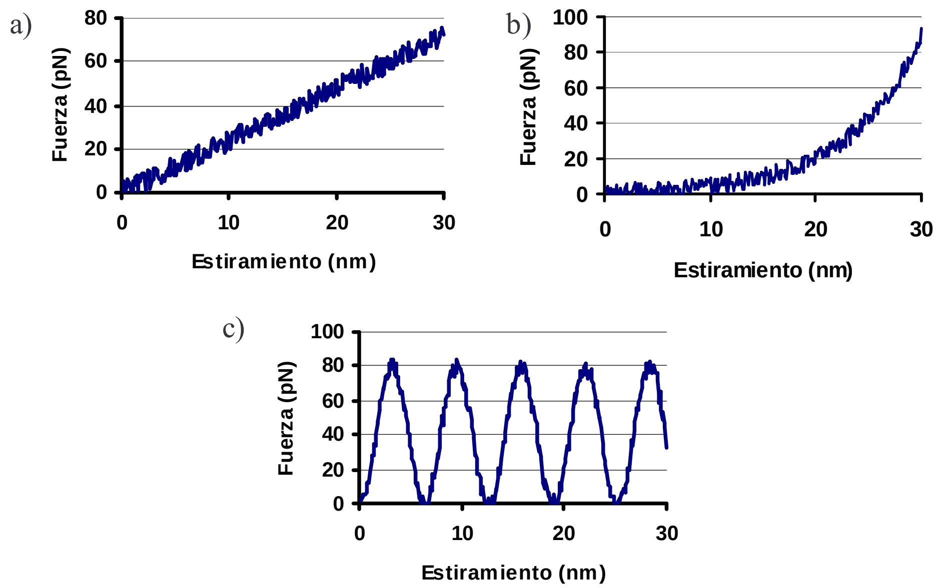
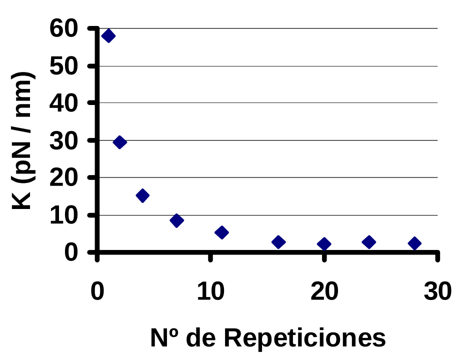


Figura 2.

a) ¿Cuál de estos gráficos se correspondería con la proteína con dominios de ankirina? Averigüe aproximadamente su constante elástica.

b) Si se construye una serie de proteínas con distinto número de repeticiones de ankirina y se mide su constante elástica se obtiene un gráfico como el de la Figura 3.



¿Cómo interpreta este resultado? ¿Más o menos cuántas repeticiones de ankirina tiene la proteína según el resultado obtenido de la Fig. 2 a)?

<u>Nota:</u> varios resortes de constantes k_i colocados en serie se comportan como un único resorte de constante elástica K tal que $K^{-1} = \sum_i k_i^{-1}$. Si todos los resortes son iguales y están en serie entonces $K = k / N$ donde N es el número de resortes en serie.

Movimiento oscilatorio amortiguado

Un oscilador amortiguado presenta la siguiente ecuación de Newton $ma = -kx - \gamma v = 0$, o

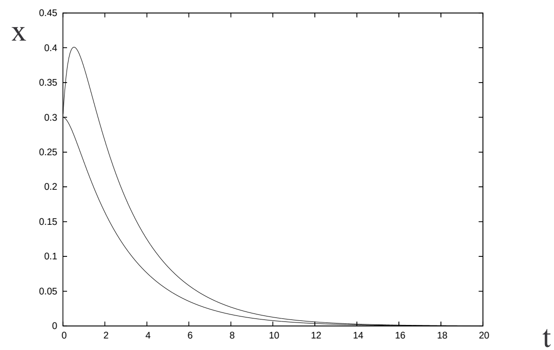
$a + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m} v = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Las formas de las soluciones para x(t) dependerán de la relación entre los parámetros *m*, *k*, y *γ*. Pueden clasificarse en dos tipos de movimiento: *decaimientos sobreamortiguados y oscilaciones amortiguadas*.

- *Decaimiento exponencial (sobreamortiguado)*: Cuando el término disipativo es grande las soluciones no oscilan, sino que decaen al origen. Es el caso $(\gamma/2m)^2 > \omega_0^2$

Se trata de un movimiento *sobreamortiguado* cuya solución general se escribe como

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

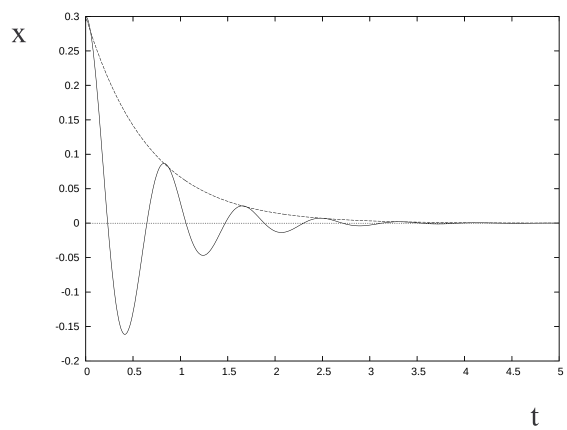
$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{\gamma}{2m} + \sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{\gamma}{2m} - \sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$



- *Oscilaciones amortiguadas*: si $(\gamma/2m)^2 < \omega_0^2$ se puede ver que las soluciones se representan como

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_{am} t + \phi)$$
$$v(t) = -Ae^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\omega_{am} t + \phi) + \omega_{am}\sin(\omega_{am} t + \phi)\right]$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\gamma}{2m} \\ \omega_{am}^2 = \omega_0^2 - \left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 \end{cases}$$



Un tiempo característico de la oscilación amortiguada es $\tau = \lambda^{-1}$. Es el tiempo en que la amplitud cayó a un 36.8% de su valor inicial ($e^{-1} = 0.368$). Otro valor que caracteriza a las oscilaciones amortiguadas es su coeficiente $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$. Para sistemas oscilantes poco amortiguados Q toma valores altos (por ejemplo para un auto con amortiguadores en buen estado $Q \cong 1$, mientras que para una cuerda de guitarra es varios miles)

14) Se tiene una esferita de platino de 2.9 cm de diámetro unida a un resorte de constante k=0.1 N/m. Se comprueba que cuando está sumergida en aceite oscila de manera que su posición en función del tiempo es $x(t) = 5cm\ e^{-0.02t/s} \cos(0.6t/s)$.

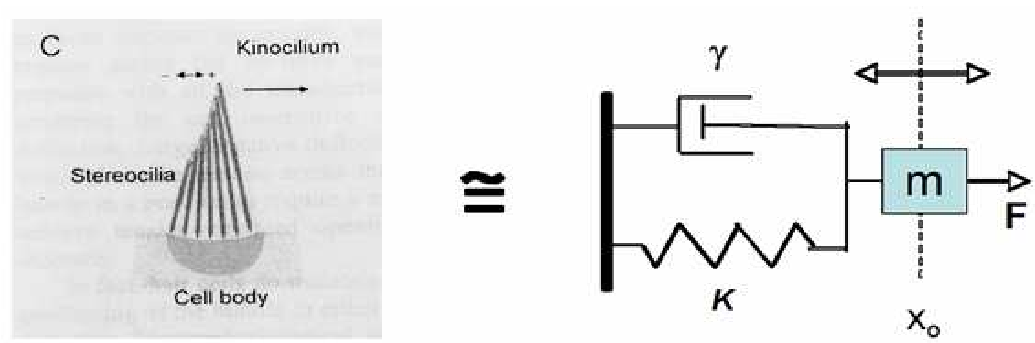
a) Grafique la posición en función del tiempo. Calcule el valor de τ y el período de la oscilación.

b) Calcule la masa de la esferita

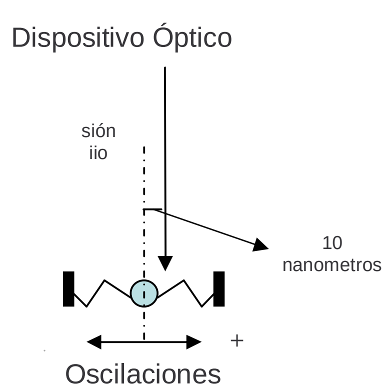
c) En las condiciones del problema la constante de amortiguamiento verifica la ley de Stokes, $\gamma = 6\pi R\eta$, donde R es el radio de la esfera y η es el coeficiente de viscosidad del medio. Calcule el valor de y de η

Resp. a) τ =50 seg; T=10.5 seg   b) m=277 g c) γ =0.011 kg/s; η =0.04 kg s^{-1}/m

15) Las células sensoriales del oído (Hair cells) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son mas (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como "transformadores" de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa ***M*** acoplada a un oscilador de constante ***K*** moviéndose en un medio viscoso con disipación lineal ***γ***. O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.



Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), se abre un canal que deja entrar corriente a la célula.



Para las siguientes condiciones: $\boldsymbol{K}$ = 1 mN/m (1.10^{-3} N/m), masa $\boldsymbol{M}$ = 10^{-13} kg en un medio con $\boldsymbol{\gamma}$ =0.001 μN.s/m (1.10^{-9} N.s/m) determine

a) Si el movimiento es sub o sobre amortiguado y el valor de su coeficiente $Q = \dfrac{\omega_0}{2\lambda}$

b) Cuanto valen la frecuencia y el período de la oscilación?

c) Cual es su $\boldsymbol{\tau}$?

d) Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm (X_o=50 nm, v_0=0) cuántas veces la estereocilia cruza el detector? Cuántas veces se habrá abierto el canal?

Resp.: a) es subamortiguado y Q=10; b) f = 15.9 KHz, T=62.8 μseg; c) $\boldsymbol{\tau}$=200 μseg; d) el canal se abre cinco veces