MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA
1^{er} cuatrimestre 2011
SERIE VIII
MÉTODOS PERTURBATIVOS
Parte I: Perturbaciones regulares

Problema 1: Dada la ecuacion diferencial:

$$u_t + \epsilon\ u\ u_x - u_{xx} = 0.$$

Escribir las ecuaciones correspondientes a las soluciones de orden 0 y de orden 1 en ϵ.

Problema 2: Ecuación de Hemmholtz modificada.

Dada la ecuación:

$$u_{xx} + u_{yy} + \epsilon^2\ u = 0.$$

con C.I. y C.C. dadas por: $u_(x, y) = 1$, en $x^2 + y^2 = 1$. Sugerencia: Plantear en coordenadas polares.

Problema 3: Conducción del calor.

i. Encontrar la soluciones a orden n en ϵ de la ecuación de conducción del calor unidimensional:

$$u_t + \epsilon\ u = u_{xx},$$

en $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$.

ii. Discutir el resultado respecto de la escala de tiempo $\tau = \epsilon\ t$.

Problema 4: Problemas de Autovalores

Dado el siguiente problema de autovalores:

$$\mathbf{L}(M(x, y, z)) = (\lambda + \epsilon r(x, y, z))\ \rho\ M,$$

donde $0 < \epsilon << 1$:

$$\mathbf{L}(M) = -\nabla.(p\nabla M) + q\ M,$$

con C.C.:

$$\alpha M + \beta \frac{\partial M}{\partial n}|_{\ \partial G} = 0,$$

demostrar que, si escribimos a las autofunciones de la solucíon como:

$$M_k = \sum_0^\infty M_k^{(n)}\ \epsilon^n,$$

y a los autovalores:

$$\lambda_k = \sum_{0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \ \epsilon^n,$$

suponemos que a orden 0 existe una única autofunción para cada autovalor, entonces las autofunciones de 1^{er} orden en ϵ estan dadas por:

$$M_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(r \ M_k^{(0)}, M_j^{(0)})}{\lambda_j^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \ M_j^{(0)}.$$

Donde el producto interno se define como:

$$(f, g) = \int \int_G \ \rho \ f \ g \ dV.$$

También demostrar que a 1^{er} orden en ϵ es:

$$(M_k^{(1)}, M_k^{(0)}) = 0.$$

Problema 5:

Resolver el siguiente problema de autovalores en un cuadrado G:

$$-(M_{xx} + M_{yy}) + \epsilon \ x \ y \ M = \lambda M.$$

Con: $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$ y C.C. $M(x, y, \epsilon)|_G = 0$.

Parte II: Capa límite

Problema 1: Capa límite interna.

Dada la ecuación de primer orden:

$$\epsilon(u_t + u_x) + (t-1)^2\ u = 1, \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

con C.I. $u(x,0) = 0$.

i. Encontrar la solución exterior, para $t >> 1$.

ii. Realizar la transformación de *stretching* $t = \epsilon\tau$ y hallar la solución interior para $t << 1$.

ii. Encontrar la solución cerca de $t = 1$ y dar el rango de validez de esta solución. Sugerencia: Utilizar las transformaciones:

$$t - 1 = \epsilon^{1/3}\tau, \quad u = \epsilon^{-2/3}\ v$$

Problema 2: Perturbación singular de una ecuación hiperbólica.

Dada la ecuación:

$$\epsilon(u_{tt} - c^2\ u_{xx}) + u_t + a\ u = 0$$

con C.I. $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$.

i. Encontrar las ecuaciones para el orden 0 y el orden 1, para la solución exterior.

ii. Aplicar una transformación de *stretching* $t = \epsilon^r\ \tau$ y determinar el valor de r para que $u_{\tau\tau}$ sea el término líder. Encontrar las ecuaciones correspondientes al orden 0 y al orden 1. Determnar el rango de validez de éstas soluciones y pegarlas a las solución exterior.