Teoría Cuántica de Campos

1^{er}cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

guia 1: Cuantificación de un sistema de partículas y Teória de Campos Clásicas

1. Considere una cadena unidimensional de partículas de masa m con acoplamiento cuadrático a primeros vecinos $\frac{\kappa}{2}(q_{n+1} - q_n)^2$ con q_n el apartamiento de la posición de equilibrio de la n-ésima partícula.

   (a) Escriba el lagrangiano y el hamiltoniano del sistema. Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿Cuál sera la ecuación que conresponde al límite continuo (es decir cuando la diferencia entre vecinos $a \equiv (q_{n+1} - q_n) \to 0$ y $n \to \infty$)? Muestre que la velocidad del sonido es en este caso $v = \sqrt{a^2\kappa/m}$

   (b) Volviendo al caso discreto, considerando condiciones de contornos periodicas, encuentre los modos normales $q_n(t) = \sum_n a_k(t) u_n^k$; encuentra la relación de dispersión $\omega_k(k, \kappa, a)$, el hamiltoniano y halle explícitamente la solución de los modos normales en función del tiempo.

   (c) Calcule los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \{b_k, b_{k'}\} &= \{b_k^*, b_{k'}^\star\} = 0 \\ \{b_k, b_{k'}^\star\} &= \frac{-i}{2m\omega_k}\delta_{kk'} \end{aligned}$$

2. Cuantifique el sistema anterior. Es decir, reemplace las variables de posiciones y momentos q_n y p_n por operadores $\hat{q}_n$ y $\hat{p}_n$ que satisfagan las reglas de comutación usuales, expanda la solución en la base de modos normales, encuentre los operadores de creación y destrucción y el operador hamiltoniano $\hat{H}$. Calcule su espectro (el conjunto de sus autovalores).

3. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de destrucción a,

$$a|\lambda >= \lambda|\lambda >$$

   donde $\lambda \in C$.

   (a) Demuestre que

$$|\lambda >= e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger}|0>$$

   es un estado coherente normalizado.

   (b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

   (c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-ipl/\hbar)$ (siendo l la distancia desplazada) al estado fundamental.

   (d) Escribe la función de onda en el espacio de coordenadas correspondiente al estado $|\lambda>$.

   (e) Halle la evolución temporal de $|\lambda>$ desarrollándolo en la base $\{|n>\}$ de autoestados del Hamiltoniano $\hat{H}$. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor λ varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de λ y muestre como varían $< H >$ y $< p >$ en el tiempo.

   (f) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisenberg para los operadores a y $a^\dagger$.

   (g) Si se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

4. Sea $\phi(x, t)$ un campo escalar y consideremos la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi$$

   y el lagrangiano

$$L(t) = \int \mathcal{L}\; d^3x$$

(a) Con el objetivo de comparar el lagrangiano de un sistema continuo con el de un sistema de n partículas, diga como se traducen al caso discreto los objetos que se dan a continuación:

- x
- $\phi(x,t)$
- la integral $\int d^3x$ que figura en $L(t)$

(b) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema continuo mencionado arriba?

(c) En un sistema de n partículas, ¿Bajo que condiciones el lagrangiano del sistema es la suma de los lagrangianos individuales de cada partícula?

(d) Una vez resuelto el item anterior, mire la expresión dada arriba para $L(t)$. ¿Qué quiere decir que una teoría de campos es local?

5. Sea el lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*.$$

(a) Halle las ecuaciones de movimiento para los campos en dicho lagrangiano.

(b) Suponga $m = 0$ y $\phi^* = \phi$, y halle la corriente que se conserva debido a la simetría que posee el lagrangiano ante la tranformación $\phi \to \phi + \alpha$ ($\alpha = \; cte$).

(c) Halle la corriente y su respectiva carga que se conservan debido a la transformación de simetría $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ ($\alpha = cte$).

(d) ¿Es este lagrangiano invariante de Lorentz? ¿Cuál es el motivo por el que construimos lagrangianos que sean invariantes de Lorentz?

6. Considere los cuatro lagrangianos siguientes

$$\begin{aligned}
L_I &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
L_{II} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (A^\mu_{\;,\mu})^2 \\
L_{III} &= -\frac{1}{2} A^\mu_{\;,\nu} A_\mu^{\;;\nu} \\
L_{IV} &= \frac{1}{2} \left[A_\mu F^{\mu\nu}_{\;\;,\nu} - A_{\nu,\mu} F^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

donde $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Calcule las ecuaciones de movimiento y las corrientes conservadas correspondientes a las invariancias frente a las transformaciones:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

donde $\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu\sigma}\eta_{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$y a^μes un 4-vector constante. Calcule también la corriente conservada correspondiente a las invariancia de gauge

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \xi.$$

En el caso de L_I, las variables son $A_\mu$pero está escritos de esta forma para poner de manifiesto su carácter de invariante de gauge. El segundo,L_{II}, (lagrangiano de Fermi) no es invariante de gauge pero no se necesita condiciones suplementarias para llegar a las ecuaciones de movimiento $\Box^2 A_\mu = 0$. El tercero L_{III}, difiere del segundo por un término de divergencia si $\partial_\mu A^\mu = 0$. Finalmente el último (lagrangiano de Schwinger) considera ambos A_μy $F^{\mu\nu}$como variables independientes.

7. Sea el lagrangiano del campo escalar complejo, $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$

(a) Muestre que dicho lagrangiano no es invariante frente a la transformación $\phi \to \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi$

(b) Diga como tiene que transformar el campo A_μ de manera tal que frente a la transformación $\phi \to \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi$ la cantidad $D_\mu \phi$ (donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$) transforme según $D_\mu \phi \to (D_\mu \phi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi$. ¿Le resulta conocida la regla de transformación del campo A_μ?

(c) Considere ahora el nuevo lagrangiano, $\mathcal{L} = D_\mu\phi\, D^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$. Muestre que es invariante frente a las transformaciones $\phi \to \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi$ y A_μ transforma según lo que encontró en el item anterior.

(d) Dé una interpretación a la cantidad conservada por la simetría de dicho lagrangiano.

(e) Si ϕ fuese real ¿el lagrangiano tendría dicha simetría? ¿Por qué al campo escalar real se lo llama *neutro* y al complejo *cargado*?

8. Calcule la ecuación de movimiento para el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi + \lambda\phi^n \quad \text{con} \;\; n > 2$$

Considere dicha ecuación en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$: ¿Cuál es la diferencia fundamental entre ambas? (Ayuda: diferencia en el sentido de clasificación de una ecuación diferencial). Justifique a partir en este ejemplo el criterio que se suele usar para identificar términos libres o de interacción en un lagrangiano.