Teoría Cuántica de Campos

1^{er}cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

guia 2: Segunda Cuantización y propagadores

1. Segunda cuantización de un sistema relativista
   (a) Aplique el formalismo de segunda cuantización al lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar neutro. Expanda los campos en modos normales y obtenga los operadores de creación y aniquilación, así como sus reglas de conmutación. Utilice el método de *normal ordering* para escribir el hamiltoniano en función de los operadores de construcción y aniquilación.
   (b) Idem que el punto anterior, pero para el campo cargado. Además, halle la carga conservada debido a la simetría global $\phi(x) \to \phi(x)e^{i\alpha}$, y deduzca el concepto de antipartícula.

2. Muestre que la medida de integración $\frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$ es invariante Lorentz. Luego, muestre que si
$$F(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}} f((\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}, \vec{p}) \cdot x)$$
entonces $F(\Lambda x) = F(x)$ para toda transformación de Lorentz Λ. *Nota: generalmente se suele escribir* $\frac{d^3p}{p^0}$ *para abreviar*.

3. Un operador que corresponde a un observable local se escribe en forma general como
$$\hat{A}(x) = \hat{\phi}^\dagger(x) A(x) \hat{\phi}(x),$$
donde $A(x)$ es una función c-number (o sea, una función común!).
   (a) Muestre que si uno mide dos observables correspondientes a los operadores observables $\hat{A}_1(x)$ y $\hat{A}_2(y)$, entonces estas dos mediciones no se pueden influenciar la uno con la otra si x e y están a distancias *space-like*, $(x-y)^2 < 0$. (Esto muestra que QFT respeta *causalidad*, y esta es una de las grandes virtudes que tiene sobre la mecánica cuántica ordinaria!)
   (b) Muestre que si uno hubiese elegido realizar la segunda cuantización del campo escalar usando *anticonmutadores* en vez de *conmutadores* entonces no hubiese obtenido el importante resultado del punto anterior para el campo escalar.

4. Aplique el formalismo de segunda cuantización a la ecuación de Klein-Gordon usando una expansión en ondas esféricas. Muestre la relación que existe con la expansión usual en ondas planas. Calcule los operadores de momento y momento angular en esta representación. Muestre que el operador de momento angular no es diagonal en la base usual de ondas planas.

5. Se define el propagador de Feynman como
$$\Delta_F(x-y) = -i\langle 0|T\left((\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\right)|0\rangle,$$
donde T es el operador de ordenamiento temporal.
   (a) Escriba $\Delta_F(x-y)$ en función de $\Delta(x-y) = -i[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ y $\Delta_1(x-y) = -i\{\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\}$.
   (b) Halle la representación integral en 4 dimensiones de $\Delta_F(x)$. Muestre que, debido a los polos en el camino de integración, el resultado se puede expresar o bien definiendo el camino de integración, o bien desplazando los polos.
   (c) Muestre que $\Delta_F(x)$ es solución de la ecuación de Klein Gordon inhomogénea,
   $$(\Box + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x).$$
   Es esto suficiente para definir unívocamente a Δ_F? Si su respuesta es negativa, indique cómo completaría la definición para que esta sea unívoca.

(d) Dé una interpretación física para el propagador de Feynman, $\Delta_F(x-y)$

6. Calcule la representación integral en espacio de momento en tres y cuatro dimensiones de $\Delta(x-y)$, $\Delta_1(x-y)$ y los siguientes propagadores:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(+)} &= \frac{1}{2}(\Delta + \Delta_1) \\
\Delta^{(-)} &= \frac{1}{2}(\Delta - \Delta_1) \\
\Delta_F &= \frac{1}{2}(sgn(x_0)\Delta + \Delta_1) \\
\Delta_R &= \Theta(x_0)\Delta \\
\Delta_A &= -\Theta(-x_0)\Delta \\
\Delta_D &= \frac{1}{2}(sgn(x_0)\Delta - \Delta_1) \\
\bar{\Delta} &= \frac{1}{2}sgn(x_0)\Delta
\end{aligned}
$$

donde $sgn(x_0)$ es la función signo y $\Theta(x_0)$ la función escalón de Heavyside. En el caso de cuatro dimensiones, ponga especial énfasis en las condiciones de contorno en el espacio complejo de la variable p^0. ¿Qué pasa cuando se les aplica el operador $\Box + m^2$?