Teoría Cuántica de Campos

$1^{er}$cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

guia 3: Teoría de Grupos y grupo de Lorentz

1. Grupos continuos:

   Considere el conjunto $SO(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} /\ A^{-1} = A^T\ ,\ \det A = 1\}$ (junto con la operación producto matricial)

   (a) Muestre que es un grupo.
   (b) Muestre que es abeliano.
   (c) Muestre que es un grupo continuo y halle su dimensión.
   (d) Según el item anterior, diga cuál es el número de generadores del grupo. Halle un conjunto de generadores y el álgebra que satisfacen.
   (e) A partir de el o los generadores hallados en el item anterior, muestre que cada elemento del grupo se puede escribir via la *fórmula exponencial*.
   (f) Muestre que es isomorfo al grupo $U(1)$.
   (g) De un ejemplo de un subgrupo de $SO(2)$.

2. Muestre que si los generadores de un grupo conmutan entre si, entonces el grupo es abeliano (¿Vale la recíproca?). Concluya que los grupos de dimensión 1 son abelianos.

3. Grupo de Lorentz
   Usando la representación de las matrices $\Lambda$ en la base de cuadrivectores (o sea, las $\Lambda$ *usuales*) y la fórmula exponencial verifique que $(J_{\lambda\sigma})_\mu^\nu = -i(\delta_\lambda^\nu g_{\sigma\mu} - \delta_\sigma^\nu g_{\lambda\mu})$ para un boost en la dirección $x$ y una rotación en el plano $x-y$.

4. Con sólo conocer una representación de un grupo uno puede averiguar mucho de su estructura y así de otras representaciones:

   (a) Usando la representación usual del grupo de Lorentz que transforma los cuadrivectores $x^\mu$, halle sus generadores y muestre que el álgebra de Lie queda definida a través de las reglas de conmutación

   $$[K_i, K_j] = -i\,\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_x, K_y] = i\,\epsilon_{ijk}K_k,$$

   donde $K_i$ corresponde al generador de un boost en el eje $i$, y $J_i$ a una rotación en el eje $i$ ($i, j = x, y, z$).

   (b) Una vez connocida la estructura del grupo de Lorentz, $SO(3,1)$, muestre que usando las matrices de Pauli $\sigma^1, \sigma^2$ y $\sigma^3$ pueden generarse dos representaciones matriciales irreducibles del grupo de Lorentz (i.e. demuestre la composición $SO(3,1) \sim SU(2) \times SU(2)$.)

5. Construya las distintas representaciones del grupo de Lorentz explícitamente, indique en cada caso de qué campo físico se trata. Antes de empezar a hacer cuentas, indique el spin de las partículas y la cantidad de grados de libertad.

   (a) $(\frac{1}{2}, 0)$
   (b) $(0, \frac{1}{2})$ ¿Qué diferencia (si lo hay) hay con la anterior?
   (c) $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$
   (d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ¿Qué diferencias y qué similitudes existe entre este caso y el anterior?

6. Preguntas

   (a) ¿Cuál es la dimensión del grupo de Lorentz propio?
   (b) ¿Es $\Lambda$ ortogonal?
   (c) Los boost en una misma dirección ¿forman un grupo?
   (d) Los boost en distintas direcciones ¿forman un grupo?