Teoría Cuántica de Campos

$1^{er}$cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

guía 4: Ecuación de Dirac

1. Considere el siguiente lagrangiano
$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$
Calcule las ecuaciones de movimiento y el tensor canónico de energía-momento. Mostrar que bajo transformaciones de Lorentz, el tensor
$$M^{\mu\nu\sigma} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(x^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\nu} - x^\nu\frac{\partial}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{4}[\gamma^\sigma,\gamma^\nu]\right)\psi$$
se conserva (es decir $\partial_\mu M^{\mu\nu\sigma} = 0$).

2. Demuestre que todas las soluciones de la ecuación de Dirac son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

3. Muestre que las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac definen una ecuación de continuidad para cierta función $\rho$ y cierta corriente $\vec{j}$ (i.e. se pueden definir dichas cantidades de manera que $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$ se desprenda de la misma ecuación). (Ayuda: reste la ecuación de onda de su compleja-conjugada).

4. Bilineales de Dirac
   (a) Muestre que $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ no es un escalar ante transformaciones de Lorentz y que, en cambio, sí lo es $\psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x) \equiv \bar{\psi}(x)\psi(x)$.
   (b) Halle las propiedades de transformación ante el grupo de Lorentz de los siguientes bilineales de Dirac:
$$i)\ \overline{\psi}\psi \qquad ii\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad iii)\ \overline{\psi}\gamma^5\psi \qquad iv)\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \qquad v)\ \overline{\psi}\ [\gamma^\mu,\gamma^\nu]\ \psi.$$

5. Demuestre que los siguientes operadores conmutan con el hamiltoniano de una partícula libre de spin $\frac{1}{2}$
$$\begin{aligned} O_1 &= \vec{x}\times\vec{p} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \\ O_2 &= \mathcal{P}\cdot\gamma^0\end{aligned}$$
donde $\sigma_i$ son las matrices de Pauli y $\mathcal{P}\vec{x} = -\vec{x}$ es el operador inversión espacial. Dé una interpretación física para $O_1$ y $O_2$.

6. Otras representaciones de las matrices de Dirac.
   (a) Muestre que además de la representación estándar (S) de las matrices de Dirac, la representación de Weyl (W) o quiral,
$$\gamma^0_W = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \gamma^j_W = \begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ -\sigma^j & 0\end{pmatrix}$$
   y la representación de Majorana (M),
$$\gamma^0_M = \gamma^0_S\gamma^2_S \quad \gamma^1_M = i\gamma^0_S\gamma^1_S \quad \gamma^2_M = i\gamma^0_S \quad \gamma^3_M = i\gamma^0_S\gamma^3_S$$
   también cumplen con la condición $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.
   (b) Muestre que en la representación quiral la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$, donde $\psi_L$ representa la parte de quiralidad *left* y $\psi_R$ la parte de quiralidad *right* de la función de onda.
   (c) Muestre que en la representación de Majorana si $\psi$ satisface la ecuación de Dirac con un acoplamiento $e$ al campo electromagnético, entonces $\psi^*$ satisface la ecuación de dirac con acoplamiento $-e$.

7. Partiendo de la definición de los operadores siguientes

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right)$$

demostrar las siguientes propiedades:

(a) $P_+ + P_- = 1$

(b) $(P_\pm)^2 = P_\pm$ (i.e. son proyectores)

(c) $P_+ P_- = 0$

(d) $\gamma^5 P_\pm \psi = \pm P_\pm \psi$

(e) $\gamma^5 \psi = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}\psi$ (en el límite ultrarelativista)

8. Se define el operador de helicidad como $\hat{\lambda} = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|p|}$ (la proyección del spin sobre la dirección del movimiento), y el operadores de quiralidad como $\gamma^5$. (Las proyecciones de quiralidad *left* y *right* se realizan con los operadores $P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$, respectivamente.)

(a) Demuestre que la helicidad se conserva (ayuda: escriba $\vec{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$. ¿Lo puede demostrar?), pero que la quiralidad (en general) no se conserva.

(b) Muestre que las ecuaciones de movimiento de $\psi_L$ y $\psi_R$ están acopladas por la masa de la partícula. (Ayuda, utilice la representación de Weyl. Las ecuaciones desacopladas para $\psi_{L,R}$ cuando $m = 0$ se llaman ecuaciones de Weyl.)

(c) Muestre que en el límite ultrarelativista las partículas *left* tienen helicidad negativa y las partículas *right* tienen helicidad positiva. Luego, en este límite la quiralidad se debería conservar: demuéstrelo.

9. La operación de conjugación de carga se define como

$$\psi^c = C\psi^*$$

donde la matriz $C$ satisface las siguientes propiedades: $C^2 = 1, C^\dagger = C, C(\gamma^\mu)^* C = -\gamma^\mu$.

(a) Muestre que si $\psi$ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético, entonces $\psi^c$ satisface la misma ecuación cambiando $e \to -e$.

(b) Pruebe que en la llamada representación standard de las matrices de Dirac, puede tomarse $C = i\gamma^2$. De otra posibilidad para $C$.

(c) Muestre que en la representación de Majorana puede tomarse $C = 1$.

10. Invarianza de gauge y acople electromagnético.

(a) Demuestre la invariancia del lagrangiano de Dirac frente a una transformación global del grupo $U(1)$ definida de la siguiente manera

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi$$

donde la palabra global significa que $\alpha$ no depende de las coordenadas espacio-temporales.

(b) Asumiendo una modificación del lagrangiano de Dirac dado por

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

deducir la regla de transformación de la función $A_\mu$ para que el nuevo lagrangiano sea invariante ante la transformación $U(1)$ local (i.e. donde local significa que $\alpha$ es ahora una función de las coordenadas espacio-temporales).

(c) Verificar, luego, que esta transformación obtenida para el $A_\mu$ no afecta al término cinético $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ del campo de Maxwell (donde se asumió la identificación del campo $A_\mu$ como el campo electromagnético).

11. Considere el lagrangiano de Dirac y las siguientes transformaciones de los spinores

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\alpha}\psi \\ \psi &\rightarrow e^{i\beta\gamma_5}\psi\end{aligned}$$

siendo $\alpha,\ \beta \in R$.

(a) Construya las corrientes de Nöther asociadas a ambos transformaciones y especifique en qué casos se conservan.

(b) Escriba las transformaciones y las corrientes explícitamente en términos de los spinores $\psi_R$ y $\psi_L$.

12. Si

$$\psi(x) = u(\vec{p}, s)\, e^{-ip\cdot x} \qquad \psi(x) = v(\vec{p}, s)\, e^{ip\cdot x}$$

son las soluciones de onda plana de la ecuación de Dirac para un electrón y un positrón, respectivamente, de momento $\vec{p}$ y spin $s$, entonces

(a) muestre que $u(\vec{p}, s)$ y $v(\vec{p}, s)$ satisfacen cada una las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)\, u(\vec{p}, s) &= 0, \\ (\not{p} + m)\, v(\vec{p}, s) &= 0.\end{aligned}$$

(b) muestre que la forma explícita de estas soluciones de onda plana se puede obtener a partir de la solución en reposo ($\vec{p} = 0$) a través de

$$\begin{aligned}u(\vec{p}, s) &= \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}}\, u(0, s), \\ v(\vec{p}, s) &= \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}}\, v(0, s).\end{aligned}$$

(Observe que esta es una buena alternativa al *'boost'* del ej. 4.)

(c) muestre que

$$\begin{aligned}\sum_s u(\vec{p}, s)_\alpha \bar{u}(\vec{p}, s)_\beta &= \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \\ \sum_s v(\vec{p}, s)_\alpha \bar{v}(\vec{p}, s)_\beta &= \left(\frac{\not{p} - m}{2m}\right)_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

13. Aplique el formalismo de segunda cuantificación a la ecuación de Dirac para un campo de spin $1/2$ . Para esto, use una expansión en ondas planas

$$\psi^{(r)}_{\vec{p}}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{\omega_p}}\, w_r(\vec{p}) e^{-i\epsilon_r(\omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

donde el índice $r = 1, 2(3, 4)$ indica las soluciones de energía positiva(negativa) $\omega_p = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Muestre que el Hamiltoniano cuántico, en la teoría de Dirac, puede escribirse

$$\hat{H} = \int d^3p \sum_\alpha \omega_p \left(b^\dagger_\alpha(\vec{p}) b_\alpha(\vec{p}) + d^\dagger_\alpha(\vec{p}) d_\alpha(\vec{p})\right) - E_0,$$

donde $E_0$ es un término infinito, pero constante, que representa la energía del *mar de Dirac*.

14. Muestre que el propagador de la ecuación de Dirac está dado por

$$\begin{aligned}S^{\alpha\beta}_F(x - y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \left[\frac{1}{\gamma^\mu k_\mu - m}\right]^{\alpha\beta} \\ &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{[\gamma^\mu k_\mu + m]^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2}\end{aligned}$$

siendo los índices $\alpha\,\beta$ los de la representación spinorial (omitidos usualmente por convención).

15. Parta de la hipótesis de que el campo de Dirac se escribe

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \sum_s \left( b(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x} + d^\dagger(p,s)v(p,s)e^{+ip\cdot x} \right),$$

pero que desconoce si los operadores de creación y destrucción satisfacen la reglas usuales de conmutación o anticonmutación.

Teniendo en cuenta que los observables son construidos como combinaciones bilineales de los operadores de campo: $\hat{A}(x) = \bar{\psi}_\alpha(x) A_{\alpha\beta}(x)\psi_\beta(x)$ donde $A_{\alpha\beta}$ es una matríz de Dirac consistiendo en $c$–numbers y posiblemente operadores diferenciales p.e. $A^\mu_{\alpha\beta} = e\gamma^\mu_{\alpha\beta}$: Muestre que el requisito de que *"dos observables medidos en puntos a distancia space-like no pueden interferir entre sí"* implica que los operadores de creación y destrucción deben satisfacer las reglas usuales de *anticonmutación*.

Concluya que la hipótesis de causalidad impone la estadística de Fermi-Dirac para las partículas de spin $1/2$. Teniendo en cuenta que los bosones de spin 0 no cumplen esta estadística, ¿puede aislar en qué paso el spin de la partícula juega este papel decisivo?

16. Muestre que el anticomutador entre dos operadores de campos de Dirac $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(y)$ para diferentes argumentos temporales $x_0$ y $y_0$ esta dado por $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x-y)$ siendo $\Delta(x-y)$ la función de Pauli-Jordan

$$\Delta(x-y) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin[k\cdot(x-y)]}{\omega_k}.$$

Luego, concluya que a distancias *space-like* estos dos operadores conmutan.