Teoría Cuántica de Campos

1^{er}cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

guia 5: Campos de spin 1

1. Cada modo de la expansión en ondas planas de un campo de spin 1 se escribe como

$$A_\mu(\vec{k},\lambda;x) = N_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda),$$

donde $\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)$ representa un conjunto de cuatro cuadrivectores de polarización. Estos cuadrivectores deben ser linealmente independientes, y debe haber tres tipo *space-like* y uno tipo *time-like*. Sin perder generalidad, se puede pedir también que formen un sistema ortonormal,

$$\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda') = g_{\lambda\lambda'}.$$

(a) Halle la forma explícita de estos cuadrivectores de polarización para el caso no masivo ($k^2 = 0$): usando un sistema de referencia de Lorentz, exija que los primeros dos ($\lambda = 1, 2$) sean 3D-perpendiculares a la dirección de movimiento del fotón y el tercero ($\lambda = 3$) 3D-paralelo.

(b) Muestre que estos vectores de polarización satisfacen

$$k\cdot\epsilon(\vec{k},1) = k\cdot\epsilon(\vec{k},2) = 0$$

$$k\cdot\epsilon(\vec{k},3) = -k\cdot\epsilon(\vec{k},0)$$

en cualquier sistema de referencia. (La segunda de estas relacionas será la causa de que el fotón no tenga polarización longitudinal ni temporal!)

(c) Muestre que

$$\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)\epsilon_\nu(\vec{k},\lambda) = g_{\mu\nu}.$$

Reflexione sobre cuál es el análogo a esta igualdad para el caso de fermiones.

2. Considere las siguientes densidades lagrangianas,

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

(a) Halle las ecuaciones de movimiento en ambos casos, y muestre que en el segundo caso el gauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) se satisface automáticamente.

(b) Muestre que ante una transformación de gauge $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ ($\Lambda(x)$ arbitraria), $\mathcal{L}_1$ permanece invariante, mientras que $\mathcal{L}_2$ no. (Un término de masas siempre rompe la invarianza de gauge....y es por esto que tiene que aparecer el Higgs para darle masa a las partículas manteniendo la invarianza de gauge!)

(c) Muestre que con ninguno de estos lagrangianos es posible realizar la cuantización canónica como se hizo en su momento con los campos escalares y de Dirac. ¿Por qué?

3. Considere la densidad lagrangiana modificada

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2,$$

que se reduce a la lagrangiana original si uno usa el gauge de Lorentz, $\partial_\sigma A^\sigma = 0$.

(a) Halle las ecuaciones de movimiento para el campo $A_\mu(x)$.

(b) Para el gauge de Feynman, $\zeta = 1$, halle el lagrangiano y el hamiltoniano. (En los siguientes puntos trabaje también en este gauge.)

(c) Realice la cuantización canónica sobre el campo A_μ,

$$[\hat{A}^\mu(x,t), \hat{\pi}^\nu(x',t)] = ig^{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

y expánda $\hat{A}_\mu(x)$ en ondas planas y operadores de creación y destrucción. Muestre que aunque se partió de la hipótesis $\partial_\mu A^\mu = 0$, esta relación NO se cumple a nivel de operadores debido a las reglas de conmutación canónicas: $\partial_\mu \hat{A}^\mu \neq 0$.

(d) Solucione este problema usando la hipótesis de Gupta-Bleuler. O sea, restrinja el espacio de Hilbert de estados *físicos* de fotones *libres* a aquellos estados que satisfacen $\langle\Phi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\Phi\rangle = 0$. (Piense una analogía, p. ej. en R^3, y comprenda qué es lo que está haciendo.) Muestre cómo la condición $k\cdot\epsilon(\lambda=3) = -k\cdot\epsilon(\lambda=0)$ implica que los estados *físicos* tengan la misma cantidad de fotones con polarización longitudinal que temporal. Luego, desde el punto de vista de los observables, los estados *físicos* de fotones *libres* se diferencian según su contenido de fotones transversales ($\lambda = 1, 2$).

(e) Calcule el valor medio de la energía para alguno de estos estados.

4. Se define el propagador de Feynman para los fotones como

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) := \langle 0|T\left(\hat{A}^\mu(x)\hat{A}^\nu(y)\right)|0\rangle.$$

(a) Halle el propagador de $D_F^{\mu\nu}(x-y)$ en el gauge de Feynman, $\zeta = 1$, tanto en el espacio de coordenadas como en el de momentos.

(b) Teniendo en cuenta que en un gauge arbitrario vale

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} + \frac{\zeta-1}{\zeta}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2},$$

y que muchas veces calculando diagramas de Feynman uno se encuentra con vértices en los cuales surge la contracción $k_\mu D_F^{\mu\nu}(k)$, halle el valor de ζ que conviene elegir para simplificar las cuentas en estos casos. Si hizo bien las cuentas, entonces halló el gauge de Landau.

5. Causalidad (Optativo):

(a) Muestre que si se exige que observables construidos con el campo $A_\mu(x)$ no interfieran entre sí si se miden a distancias tipo space-like, entonces *es necesario* que los operadores de creación y destrucción conmuten. O sea, muestre que un campo de spin 1 no masivo *debe ser* bosónico.

(b) Muestre lo mismo para el campo de spin 1 masivo.