Laboratorio de Física 1 (B y G)
Guía 3: Análisis de relaciones no-lineales y Leyes de Escala

Segundo Cuatrimestre de 2009

1. Objetivo

Análisis de relaciones no-lineales mediante el estudio de leyes de escala alométricas en plantas.

2. Introducción

En esta guía estudiaremos cómo analizar y demostrar que una determinada relación presenta características no-lineales, principalmente como hacer para determinar cual es la forma funcional de dicha relación. Los casos de estudio que te proponemos son diversas leyes de escala en plantas. Un ejemplo muy impresionante de leyes de escala en biología es el caso de las *leyes alométricas* que se expresan de la forma:

$$Y = Y_0 M^b$$

donde Y es la variable biológica y M es la masa, mientras que b y Y_0 son constantes que caracterizan la relación. Muchos y variados fenómenos biológicos tienen la particularidad de escalear como "cuartos". Por ejemplo, la tasa metabólica escalea como $M^{3/4}$, el ritmo cardíaco y la tasa de metabolismo celular escalean como $M^{1/4}$, el tiempo de circulación de la sangre y el crecimiento embrionario escalean como $M^{1/4}$. Existe un modelo desarrollado por *West*, *Brown* y *Enquist[1]* (modelo de WBE) que propone que, tanto en plantas como en animales, la evolución por selección natural ha resultado en optimizar las redes vasculares de forma fractal. Esta es la principal hipótesis que permite predecir las leyes de escala mencionadas anteriormente (entre muchas otras)[2].

3. Actividades

Lo que proponemos básicamente en esta práctica es juntar hojas y medir a alguna de sus características físicas. La idea es colectar por lo menos 10 hojas frescas (pueden ser de la misma especie o de especies diferentes). Lo importante es que abarquen un rango amplio de tamaños. Por ejemplo, hoja de orégano y hoja de gomero.

1. Para cada hoja medimos la masa, el largo, el ancho y el área. Puede agregarse además otras variables como el número de nervaduras o las que parezcan relevantes. Con esos datos se grafica cada una de las variables medidas en función de la masa, en escala lineal.
   - Qué forma tienen los datos? (por ejemplo: recta, cuadratica, cubica, raz cuadrada, etc).
   - Puede hacerse un ajuste lineal?
2. Repetir los gráficos del ítem anterior, pero esta vez utilizando el logaritmo de las variables.
   - Qué forma adoptan en esta representación? Discutir la información que podra obtenerse de un ajuste lineal.

3.1. Algunas preguntas

Aquí van algunas preguntas que pueden orientar a lo largo de la práctica. Recomendamos leerlas antes, y sobre todo, volver a leerlas después! Las preguntas pueden cambiar de significado a medida que la práctica avanza.

- Cómo se puede medir el área de una hoja? Qué incerteza le adjudican a dicha medición?
- Qué otros modos de cuantificar el "tamaño" se les ocurren?
- Si la masa de una hoja crece al doble, entonces el largo/ancho/área de la hoja crece al doble también?
- Si los datos en escala lineal no parecen una recta, pero en logaritmo sí, qué puede decirse?
- Si los datos en escala lineal parecen una recta, y en logaritmo también, qué puede decirse?
- Y si los datos no parecen una recta de ningun modo?

4. Información adicional

En el caso de plantas, el modelo de WBE permite realizar ciertas predicciones:

$$L = L_0 M^{1/4}$$

$$r = r_0 M^{3/8}$$

siendo L la altura de la planta, r el radio del tronco y M la masa.

Respecto de la geometría de la planta, también existen predicciones interesantes:

$$A = A_0 r^2$$

$$N = N_0 r^{-2}$$

siendo A el área de la hoja, N el número de ramas, y r el radio del tronco. Pueden encontrar una lista con muchas más leyes alométricas en el cuadro 1.

Table 1 Predicted values of scaling exponents for physiological and anatomical variables of plant vascular systems.

Variable	Plant mass		Branch radius		
	Exponent predicted	Symbol	Symbol	Exponent	
				Predicted	Observed
Number of leaves	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0^L	n_k^L	2 (2.00)	2.007 (ref. 12)
Number of branches	$\frac{3}{4}$ (0.75)	N_0	N_k	–2 (–2.00)	–2.00 (ref. 6)
Number of tubes	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0	n_k	2 (2.00)	n.d.
Branch length	$\frac{1}{4}$ (0.25)	l_0	l_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.652 (ref. 6)
Branch radius	$\frac{3}{8}$ (0.375)	r_0			
Area of conductive tissue	$\frac{7}{8}$ (0.875)	A_0^{CT}	A_k^{CT}	$\frac{7}{3}$ (2.33)	2.13 (ref. 8)
Tube radius	$\frac{1}{16}$ (0.0625)	a_0	a_k	$\frac{1}{6}$ (0.167)	n.d.
Conductivity	1 (1.00)	K_0	K_k	$\frac{8}{3}$ (2.67)	2.63 (ref. 12)
Leaf-specific conductivity	$\frac{1}{4}$ (0.25)	L_0	L_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.727 (ref. 17)
Fluid flow rate			$\dot{Q}_k$	2 (2.00)	n.d.
Metabolic rate	$\frac{3}{4}$ (0.75)	$\dot{Q}_0$			
Pressure gradient	$-\frac{1}{4}$ (–0.25)	$\Delta P_0/l_0$	$\Delta P_k/l_k$	$-\frac{2}{3}$ (–0.67)	n.d.
Fluid velocity	$-\frac{1}{8}$ (–0.125)	u_0	u_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Branch resistance	$-\frac{3}{4}$ (–0.75)	Z_0	Z_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Tree height	$\frac{1}{4}$ (0.25)	h			
Reproductive biomass	$\frac{3}{4}$ (0.75)				
Total fluid volume	$\frac{25}{24}$ (1.0415)				

Values are given as a function of total plant mass, M, and branch radius, r_k. For the latter case, predictions are compared with measured values in the last column. References cited do not quote confidence levels, except for branch length, where they are given as ±0.036. Because botanists rarely report allometric scaling with mass, no values for observed exponents are quoted. n.d., no data available.

Cuadro 1: Leyes de escala alométricas para diversas variables anatómicas y fisiológicas de sistemas vasculares de plantas.

Referencias

[1] West, Brown y Enquist, *Nature* **400**, 664 (1999)

[2] Price y Enquist, *Functional Ecology* **20**, 11 (2006)