Física 3

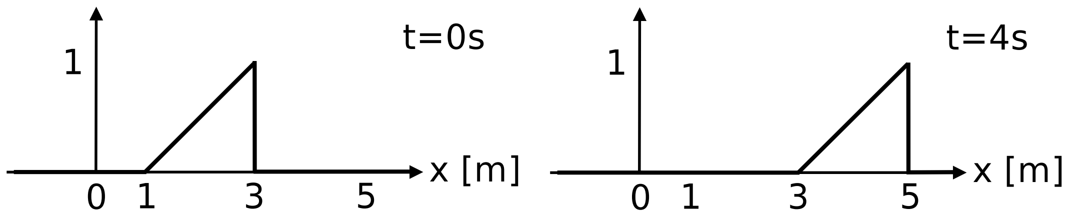
(Cs. de la atmósfera y los océanos)

Segundo cuatrimestre de 2007

Guía 6: Ondas de propagación

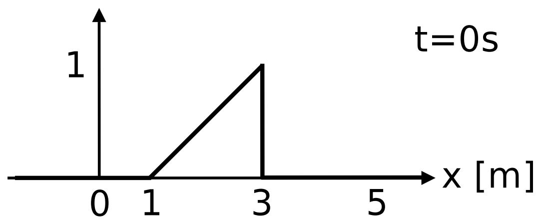
1. Considere una onda transversal armónica plana, cuya frecuencia angular es $\omega = 10$ s^{-1} y cuyo número de onda es $k = 100$ m^{-1}. En $x_1 = 1$ km y $t_1 = 1$ s la fase de la onda es $\varphi(1\text{km}, 1\text{s}) = 3\pi/2$.
   (a) ¿Cuánto vale la fase en x_1 para $t = 0$ s?
   (b) Considerando que $\varphi(x,t) = kx - \omega t + \varphi_0$, ¿cuánto vale φ_0?
   (c) ¿A qué velocidad se propaga la onda?
   (d) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el frente de onda que se hallaba en x_1 llegue a $x = 2x_1$?

2. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad v. Se toman dos fotografías de la perturbación, en $t = 0$ s y en $t = 4$ s:



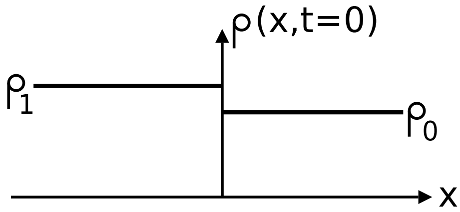
   (a) Hallar v.
   (b) Hallar $\psi(x,t)$.

3. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es $v = 100$ m s^{-1} (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). En $t = 0$ se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta desde el reposo.



   (a) Hallar $\psi(x,t) = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt)$. Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de $\psi(x,t)$.
   (b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

4. En $t = 0$ se produce en un gas la perturbación indicada en la figura. Sabiendo que $(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$, y que $\dot{\psi}(x,0) = 0$, calcule $\rho(x,t)$. Datos: ρ_0, ρ_1, y v (velocidad de propagación de las ondas en el gas).



5. Se tiene una cuerda semi-infinita que se extiende hacia la izquierda, con su extremo en $x = 0$. Una onda de amplitud A incide desde la izquierda.

   (a) Calcule la expresión para la onda reflejada en este sistema de coordenadas.

   (b) Repita el problema anterior para una cuerda que cambia su densidad en $x = 0$. Calcule la onda reflejada y trasmitida.

6. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas con distinta densidad lineal de masa (ρ_1 y ρ_2) unidas en un punto, y sometidas a una tensión T_0.

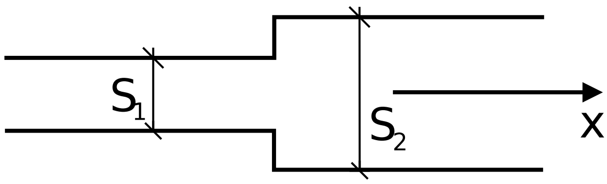
   (a) Conocida ρ_1 calcule ρ_2 para que a la onda reflejada le corresponda una amplitud que sea la mitad de la amplitud de la onda incidente. Considere los dos casos de incidencia posibles (desde la izquierda y desde la derecha).

   (b) Grafique los coeficientes de reflexión y de transmisión en función de ρ_2.

   (c) Vea que para cualquier segmento que incluya o no a la unión, el flujo de energía que entra es igual al flujo de energía que sale.

7. Un tubo lleno de aire tiene un parlante en un extremo y el otro abierto. ¿Cómo son las condiciones de borde para calcular la amplitud de la onda sonora reflejada?

8. Se tienen dos tubos semi-infinitos de distinta sección unidos como se muestra en la figura. Una



   onda acústica de la forma $\delta P_0(x,t) = A_0 \cos(\omega t - k_1 x)$ incide desde el primer tubo hacia $x > 0$. Hallar las amplitudes de presión y desplazamiento de las ondas reflejadas y transmitidas.

9. Partiendo de las ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

   halle soluciones de la forma $\phi = f(y) \cos(kx - wt)$, para ondas monocromáticas, donde ϕ es el potencial velocidad, tal que $\nabla \phi = \mathbf{u}$, y g es la aceleración de la gravedad.

10. Considere un estanque con profundidad infinita. Considere el origen de la coordenada y en la superficie del fluido en reposo.

    (a) Como la superficie del estanque es ilimitada, sin resolver el problema diga cuál es la simetría que tendrá la solución.

(b) Utilizando la condición de contorno en el fondo del estanque

$$u_y(y \to -\infty) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y \to -\infty} = 0,$$

dé una expresión de la velocidad en función de x y de y.

(c) Obtenga la relación de dispersión $\omega(k)$ y diga si el medio es dispersivo. Calcule la velocidad de fase v_φ y la velocidad de grupo v_g y comparelas.

11. Considere la solución para el estanque de profundidad infinita. Calcule u_x y u_y, y en base a esto halle la trayectoria de partícula. ¿Qué movimiento realiza y cómo varía con y? Haga un gráfico aproximado.

12. Considere un estanque con profundidad finita h.

(a) Obtenga la solución para ϕ en este caso, tomando la condición de contorno en el fondo

$$u_y(y = -h) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=-h} = 0,$$

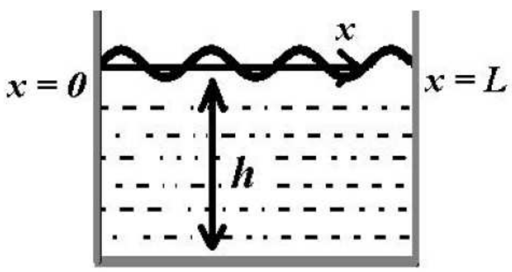
(b) Obtenga la relación de dispersión:

i. Tome el límite $h \to \infty$ y recupere el caso anterior (estanque muy profundo).

ii. Tome el límite para pequeña profundidad, $h \ll \lambda$.

Vea en qué casos es dispersivo o no el medio.

13. Considere ahora un estanque con profundidad h y con paredes laterales separadas por una distancia L (ver figura). Halle la solución para ϕ en este caso. Note que tiene que imponer condiciones de



contorno adicionales en las paredes laterales,

$$u_x(x = 0) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0} = u_x(x = L) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=L} = 0.$$

¿Que tipo de soluciones obtiene?

14. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_φ están relacionadas por

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$$

¿Cómo es $dv_\varphi/d\lambda$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

15. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

(a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right].$$

Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta k \Delta x = 1/2$ (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

(b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp[i\alpha(k-k_0)].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

(c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp[i\beta(k-k_0)^2].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple

$$\Delta k \Delta x = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk en la expresión anterior y analice.

Ayuda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[(x+a)^2\right] dx = \sqrt{\pi}.$$

16. Si $\Psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado (o sea, $\Psi(\omega) = (\Delta\omega)^{-1}$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0, y cero en otra parte), vea que $\psi(t)$ está dada por

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2}\right] \exp(-i\omega_0 t).$$

(a) Grafique $\Psi(\omega)$ y $|\psi(t)|$.

(b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $T\Delta\omega \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\psi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

17. Sea $\psi(t)$ una función real.

(a) Muestre que su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ cumple $\Psi(\omega) = \Psi^*(-\omega)$. Use esto para escribir a $\psi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

(b) Muestre que la transformada de Fourier es lineal, es decir que

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g),$$

donde f y g son funciones de x, y α y β son constantes.

18. Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2.$$

Si en $t = 0$ un pulso se propaga hacia $x < 0$, y está dado por

$$\psi(x, 0) = A \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp(ikx)dk + \text{C.C.},$$

calcule $\psi(x, t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?