Métodos Numéricos en Ciencias de la Atmósfera - Métodos Numéricos

PRÁCTICA 6: MÉTODOS ESPECTRALES

1) Resolver numericamente la siguiente ecuación diferencial con el método de Galerkin espectral:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + [\cos(x) + \cos^2(x)]u = \exp[-1 + \cos(x)]$$

para $u = u(x)$ 2π-periódica. Utilizar un desarrollo en cosenos con 2 términos (a_0, a_1) y luego un desarrollo con 4 términos (a_0, a_1, a_2, a_3); tabular los coeficientes obtenidos en cada caso.
Comparar cada desarrollo con la solución exacta

$$u(x) = \exp[-1 + \cos(x)]$$

y graficar.
Comparar los coeficientes con los obtenidos de desarrollar en serie de cosenos la solución exacta y tabular el error en c/u.
Nota:

$$\int_0^{2\pi} \cos(jx)\exp[-1 + \cos(x)]dx = \exp(-1)\begin{cases} I_0(1) & \text{si } j = 0 \\ 2I_j(1) & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

con $I_j(x)$ la función modificada de Bessel y los siguientes valores para $x = 1$,

$$\exp(-1)I_0(1) = 0.465759597$$

$$\exp(-1)I_1(1) = 0.207910413$$

$$\exp(-1)I_2(1) = 0.049938776$$

$$\exp(-1)I_3(1) = 0.008155308$$

$$\exp(-1)I_4(1) = 0.00100693$$

Comparar las soluciones numéricas obtenidas con las soluciones obtenidas con un método en diferencias finitas de segundo orden con $N = 10$, 20 y 40 puntos de grilla.

2) Considerar la ecuación de advección-difusión lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $V =$ constante (tomar $V = 1$) y $u(x,t)$ 2π periódica en el espacio x. Suponer que $u(x,t=0) = \mathrm{sen}(x) + \cos(2x)$. Resolver mediante el método de Galerkin espectral considerando un truncamiento de la forma

$$u_N(x,t) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2-1} \hat{u}_k(t)e^{ikx}$$

con $N = 6$.

3) Considerar la ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $\nu = 0.05 =$ constante, $u(x,t)$ 2π-periódica en el espacio x y suponer que $u(x,t=0) = \mathrm{sen}(x) + \cos(2x)$. Plantear las ecuaciones con el método de Galerkin espectral con un desarrollo en exponenciales complejas como en el ejercicio anterior con $N = 6$ (las ecuaciones obtenidas para los coeficientes del desarrollo se pueden integrar en el tiempo numericamente con un método de Runge-Kutta de orden 2).

Considerando ahora un método pseudoespectral con $N = 32$ y $N = 512$ puntos de grilla x_j, obtener la solución numérica $u_N(x_j,t)$ para $t = 1$, 2, 10 y 100 utilizando un método de Runge-Kutta de orden 2 para la integración temporal. Comparar la solución con la obtenida en el ejercio 2) anterior. Observar que sucede si se realiza o no de-aliasing. Comparar con un método en diferencias finitas de segundo orden con $N = 32$, 512 y 4096 puntos de grilla.

Nota: la subrutina para transformada rápida de Fourier (FFT) para el método pseudoespectral se proveerá en clase.